Serie documentos para capacitación a distancia
Segundo año de la Educación Secundaria

Introducción al Diseño Curricular

Matemática

ES.2

Dirección General de Cultura y Educación
Buenos Aires LA PROVINCIA

Serie documentos para capacitación a distancia
Segundo año de la Educación Secundaria

Introducción al Diseño Curricular

Matemática

ES.2

Dirección General de Cultura y Educación
Buenos Aires LA PROVINCIA

Dirección General de Cultura y Educación
Introducción al Diseño Curricular de Matemática / coordinado por María Alejandra Paz y Claudia Venturino. - 1ª edición - La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2008.
84 p.; 22x18 cm.
ISBN 978-987-1266-41-8
1. Diseño Curricular 2. Capacitación Docente 3. Matemática I. Paz, María Alejandra, (coord.)
II. Venturino, Claudia, (coord.).
CDD 371.1

Fecha de catalogación: 30/10/2008

Dirección Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa
Calle 12 y 50, Torre 1, piso 9
Provincia de Buenos Aires
ISBN 978-987-1266-41-8
Hecho el depósito que marca la Ley N° 11.723

Introducción al Diseño Curricular
Matemática

Programa de capacitación para Secundaria Básica
Coordinadoras
Lic. Alejandra Paz
Prof. Claudia Venturino

Especialistas
Prof. Graciela Bellome
Prof. Ana Lía Crippa
Prof. Andrea Novembre
Prof. Beatriz Ressia de Moreno
Prof. María de los Ángeles Zuvialde

Dirección de Producción de Contenidos

Edición: Adela Ruiz
Diseño: Bibiana Maresca
Cubierta: María Correa
Armado: Eugenia Nelli

Este documento se ajusta a la ortografía aprobada por la Real Academia Española y a las normas de estilo para las publicaciones de la DGCyE.

dir_contenidos@ed.gba.gov.ar

Octubre de 2008

Índice

Presentación

La Plata, septiembre de 2008

Estimados directores y docentes:

En 2005, la provincia de Buenos Aires inició un proceso de transformación y creó una nueva escuela secundaria de seis años que se constituye como el espacio privilegiado para la educación de las y los adolescentes bonaerenses. En función de avanzar en la construcción de la Educación Secundaria se ha elaborado una propuesta de enseñanza que se plasma en el nuevo Diseño Curricular, con el propósito de posibilitar a los jóvenes construir proyectos de futuro y acceder al acervo cultural de la humanidad.

La complejidad de la tarea docente, la actualización disciplinar y didáctica y los cambios curriculares requieren de una formación docente continua que permita la revisión crítica de la propia práctica. La propuesta de capacitación que se inicia persigue el propósito de acompañar a los docentes en los procesos de cambio que se impulsan y de ofrecerles herramientas que incidan en los procesos de enseñanza, mediante la implementación del Diseño Curricular de la nueva Educación Secundaria.

Por todo ello, este módulo constituye un espacio de diálogo e intercambio en relación con la práctica del docente y los posicionamientos teórico prácticos sobre la base de los cuales se deberían ir constituyendo los acuerdos para que el nuevo Diseño Curricular se constituya en una herramienta de la planificación de la enseñanza.

En este sentido, la propuesta de trabajo no agota –ni en profundidad ni en extensión– los ejes de contenido seleccionados, aunque intenta *abrir puertas* hacia un saber compartido acerca de la propuesta curricular vigente para construir juntos la escuela que todos queremos.

Los despedimos animándolos a participar de esta capacitación con el mismo compromiso con el que día a día enfrentan el desafío de la enseñanza.

Dirección de Capacitación

Introducción

El módulo que presentamos en esta oportunidad fue diseñado como material de apoyo para la capacitación a distancia destinada a profesores de Matemática de la Educación Secundaria (ES) de la provincia de Buenos Aires. En este sentido, los encuentros de capacitación y las propuestas de lectura constituyen un acercamiento al nuevo Diseño Curricular para el segundo año de la ES.

La propuesta de capacitación se propone como un espacio de reflexión sobre los fundamentos teóricos y pedagógicos del nuevo Diseño y como un ámbito de producción en el que se abordarán aspectos relacionados con el diseño y la evaluación de proyectos de enseñanza situados y coherentes con las orientaciones propuestas en el Diseño Curricular.

Ante la reformulación del sistema educativo provincial y la creación de la Educación Secundaria, se abre una instancia para renovar la dimensión curricular y para reflexionar sobre los modos como se efectúan las prácticas de enseñanza en relación con los fines específicos de este nivel, las características peculiares de los estudiantes y los actuales contextos socioculturales.

Objetivos del curso

- Profundizar los conocimientos acerca del Marco General para la Educación Secundaria en la provincia de Buenos Aires y del Diseño Curricular de Matemática para segundo año de la ES.
- Revisar y actualizar contenidos disciplinares y didácticos de la Matemática desde el enfoque adoptado en el mencionado documento curricular.

- Reconocer problemas relevantes de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática durante el 2º año de la ES, a fin de abordar su tratamiento desde marcos teóricos específicos.
- Analizar propuestas de enseñanza y de evaluación fundamentadas desde los supuestos teóricos que se sustentan.
- Identificar estrategias para que los alumnos/as tengan control sobre las propias producciones y pongan en juego diferentes formas de validación del trabajo realizado.
- Analizar diferentes producciones de los alumnos/as reconociendo el carácter constructivo del error en el aprendizaje.

Contenidos

Unidad 1. Acerca del Diseño Curricular
La Educación Secundaria en el Sistema Educativo Provincial. Fundamentos de la propuesta para la Educación Secundaria. La Matemática en la Escuela Secundaria. Enseñar Matemática en Segundo Año. La actividad matemática en el marco del enfoque didáctico adoptado en la jurisdicción: ejemplos referidos a cálculos que involucran números racionales.

Unidad 2. Diferentes sentidos de las fracciones
Secuenciación de actividades. Criterios de secuenciación. Las organizaciones grupales posibles y su importancia en la construcción de sentido de los aprendizajes matemáticos. La gestión del docente y las interacciones en la clase: interacciones entre los alumnos y los problemas, entre los alumnos entre sí, entre los alumnos con el docente. Ejemplos referidos a los números racionales en el contexto de la proporcionalidad y de la medida, y a la necesidad del surgimiento de los números irracionales.

Unidad 3. Multiplicación de números racionales
La responsabilidad didáctica de enseñar a estudiar Matemática. El rol de la Memoria y de las actividades de evocación. Ejemplos referidos a la multiplicación y división de los números racionales, al orden, a la densidad y a la representación en la recta numérica.

Unidad 4. El tratamiento del error
Errores significativos en el aprendizaje de la Matemática. Diferentes orígenes de los errores: errores que dan cuenta de las interpretaciones que hacen los alumnos de sus tareas y errores que dan cuenta de las maneras de conocer. Reflexiones en torno al tratamiento de los errores significativos. Ejemplos referidos al aprendizaje de los números racionales.

Modalidad de trabajo

La capacitación se desarrollará mediante la modalidad a distancia, con una carga horaria de 32 horas reloj. Todo el trayecto se distribuirá en 3 encuentros presenciales de 3 horas cada uno, más 23 horas de trabajo no presencial, dedicado a la lectura del material de apoyo y a la realización de las actividades.

Este módulo irá pautando ambas instancias, ya que fue pensado para guiar, orientar y acompañar el proceso de aprendizaje. La siguiente tabla sistematiza la modalidad y las características de los trabajos, las actividades a realizar y los tiempos y plazos de entrega.

Modalidad	Característica	Actividades a realizar	Duración
Trabajo no presencial o autónomo	Lectura, análisis y vinculación de contenidos de la Unidad 1, de la Unidad 2, del Anexo 1, del Marco General para la ES y del Diseño Curricular.	• Lectura de las Unidades 1 y 2, del Anexo 1, del Marco General para la ES y del Diseño Curricular. • Realización de las actividades 1 a 13.	

Encuentro presencial 1	• Presentación de los marcos teóricos. • Discusión y corrección de las actividades solicitadas para discutir en el encuentro presencial. • Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	• Debate referido a la exposición teórica. • Análisis y reflexión sobre las actividades de las Unidades 1 y 2. • Orientaciones para resolver las actividades de las Unidades 3 y 4.	3 horas
Trabajo no presencial o autónomo	Lectura, análisis y vinculación de contenidos de la Unidad 3, de la Unidad 4, del Anexo 2 y del Diseño Curricular.	• Lectura de las Unidades 3 y 4, del Anexo 2, del Anexo 3 y del Diseño Curricular. • Realización de las actividades 14 a 30.	
Encuentro presencial 2	• Presentación de los marcos teóricos. • Discusión y corrección de las actividades solicitadas para discutir en el encuentro presencial. • Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	• Debate referido a la exposición teórica. • Análisis y reflexión sobre las actividades de las Unidades 3 y 4.	3 horas
Trabajo no presencial o autónomo	Elaboración de la propuesta de evaluación correspondiente.	Revisión de lo realizado hasta el momento y evaluación no presencial.	
Encuentro presencial 3	Reflexión teórica acerca de evaluación.	Evaluación presencial.	3 horas

Recuerde que este material constituye una propuesta de enseñanza elaborada para lograr los objetivos explicitados y fue organizado en unidades didácticas que incluyen contenidos y actividades que orientarán el análisis del Diseño Curricular de la ES.

Para las instancias no presenciales o autónomas le sugerimos que:

- organice su tiempo de lectura y trabajo;
- cuando reciba el material realice una lectura rápida del módulo para tener una percepción global de los contenidos abordados;
- no postergue la realización de las actividades propuestas; cada una fue pensada desde una secuencia didáctica tendiente a facilitar el proceso de autocapacitación;
- destaque los conceptos que identifique en cada lectura;
- registre los comentarios, cuestionamientos y/o preguntas que le vayan surgiendo a fin de articular el marco teórico con su experiencia profesional;
- anote las certezas, interrogantes o dudas que se le presenten para poder trabajarlas en los encuentros presenciales;
- al cerrar cada actividad permítase reflexionar sobre lo leído y propóngase relacionar los aspectos novedosos con los ya conocidos.

En cada unidad encontrará:

- breves referencias sobre los contenidos de Matemática que se abordan en la unidad, que le facilitarán la lectura del Diseño Curricular;
- actividades elaboradas para:
  - favorecer y orientar el aprendizaje de los conceptos e ideas desarrolladas en el Marco General del Diseño Curricular, y en el capítulo referido a la enseñanza de Matemática (segundo año);
  - vincular su práctica docente con los conceptos y concepciones analizadas.

En las actividades que usted debe resolver se indica si se trata de:

- actividades para revisar durante los encuentros presenciales;
- actividades de autocorrección;
- actividades que constituyen los ítems de las evaluaciones de proceso.

Al final del módulo se incluye una serie de anexos, con diferentes características, que complementa y enriquece los contenidos del Diseño Curricular y las actividades propuestas. Recuerde que si lo necesita puede recurrir a la biblioteca del CIE.

Los encuentros presenciales son instancias de trabajo grupal diseñadas para el intercambio y la comunicación entre los docentes participantes y el docente a cargo de la capacitación. En este espacio podrá compartir ideas, plantear y resolver las dudas surgidas del estudio individual, construir grupos de estudio para analizar los contenidos y discutir las distintas formas de resolución de las actividades de aprendizaje.

Estos encuentros constituyen espacios para desarrollar contenidos no incluidos en este material, por eso se necesita que cada cursante haya realizado las actividades y lecturas propuestas en las instancias de trabajo autónomo previas al encuentro, ya que son los cursantes, con sus inquietudes, preguntas y comentarios, los que irán enriqueciendo el encuentro junto con el docente, otorgándole así una dinámica particular. En este material se detallan las actividades que deberá llevar a cada encuentro presencial, identificadas con la leyenda "para discutir en el encuentro presencial".

Es aconsejable que los grupos de estudio funcionen también en los momentos de trabajo autónomo, para intercambiar experiencias, trabajar cooperativamente y relacionarse con otros cursantes que enriquecerán su aprendizaje y su desempeño laboral en el aula y en su institución.

El CIE será el encargado de atender las cuestiones operativas de la implementación del curso, por lo que podrá comunicarse con sus encargados cuando necesite información respecto de los días y los horarios de los encuentros presenciales, las fechas de entrega de los trabajos y cuestiones relativas a los materiales de estudio, entre otros aspectos.

Evaluación y acreditación

Para lograr la acreditación del curso el docente deberá cumplir con los siguientes requisitos:

- asistir a los tres encuentros presenciales;
- presentar en los dos primeros encuentros presenciales las actividades propuestas;
- aprobar un trabajo práctico, escrito e individual –una propuesta de enseñanza– que deberá ser entregado al capacitador una semana antes del tercer encuentro presencial;
- aprobar la evaluación final en el tercer encuentro presencial.

Unidad 1

Acerca del Diseño Curricular

Características de la Educación Secundaria

En el Diseño Curricular se plantea la continuidad de los estudios de los ciudadanos, su formación como sujetos de conocimiento activos, participativos e integrados a la sociedad, y la importancia de la ES para orientar y facilitar el ingreso de los jóvenes al mundo del trabajo. Todas estas expectativas están relacionadas con una concepción de sujeto que fue modificándose a lo largo de la historia, de allí que en la actualidad no pueda concebirse separada del conocimiento y deba ser pensada dentro de las escuelas donde coexisten diferentes culturas y edades.

Actividad 1 (para discutir en el encuentro presencial)

A fin de caracterizar la Educación Secundaria y comprender sus propósitos, le solicitamos que lea en el Diseño Curricular el capítulo "Marco general para la Educación Secundaria" y realice las siguientes actividades:

- relacione la secuencia histórica que allí se explicita con su biografía escolar y profesional;
- describa la organización de la Enseñanza Secundaria en la provincia de Buenos Aires;
- explique los propósitos planteados para la Educación Secundaria y analice su importancia con relación a la demanda de la sociedad en el momento actual;
- analice las concepciones que definen la propuesta para la Educación Secundaria en la Provincia y explique las siguientes expresiones:

- implicancias del curriculum;
- niños, adolescentes y jóvenes como sujetos de derecho y como sujetos sociales;
- la ciudadanía dentro y fuera de la escuela;

- la experiencia educativa se desarrolla en la diversidad, la desigualdad y la diferencia;
- la escuela constituye un lugar de encuentro intercultural;
- la escuela es una institución de relaciones intergeneracionales;
- los y las docentes asumen la tarea de enseñar como un acto intencional, como decisión política y fundamentalmente ética;
- la escuela sólo le exige al joven su ubicación de alumno y no como joven o adolescente;
- es necesario que la escuela avance en la construcción de la relación entre lenguaje y conocimiento;
- cuando el lenguaje de la escuela no se entiende marca un adentro y un afuera;
- existen diferencias en lo que implicó la escolaridad obligatoria para la generación del 80 y lo que implica en la actualidad.

• Caracterice los principales criterios técnicos que se detallan y explicite los motivos y las decisiones que justifican su adopción.

La enseñanza de la Matemática en 2º año

Si bien existe un fuerte consenso en torno a que los problemas son y han sido el motor de la Matemática, y que para aprenderla es necesario resolverlos, no es sencillo determinar con claridad qué es un problema para un determinado grupo de alumnos. A continuación, se transcriben algunas características que deben cumplir los problemas en la perspectiva que adoptamos:

a. El enunciado *tiene sentido* en el campo de conocimientos del alumno.
b. El alumno debe *poder considerar lo que puede ser una respuesta* al problema. Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o una validación de una proposición de respuesta.
c. Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede emprender un procedimiento, pero la *respuesta no es evidente*. Esto quiere decir que no puede suministrar una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduzca a preguntas que no sabe responder inmediatamente.
d. *El problema es rico*, lo que significa que la red de los conceptos implicados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda administrar su complejidad, si no solo, por lo menos en equipo o dentro de la colectividad clase.

e. *El problema está abierto* por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantear, por la variedad de estrategias que puede poner en marcha y por la incertidumbre que genera.
Las condiciones c, d y e *eliminan un recorte del problema en preguntas demasiado pequeñas*.
f. *El problema puede formularse en dos marcos diferentes*[1], teniendo cada uno su lenguaje y su sintaxis y cuyos significados constituyentes forman parte, parcialmente, del campo de conocimientos del alumno.
g. El conocimiento buscado por el aprendizaje es el medio científico de responder eficazmente al problema. *Es un instrumento adaptado* (Douady, 1986).

Partiendo de considerar que aprender Matemática es construir el sentido de los conocimientos, es necesario tener en cuenta que esa construcción requiere de una interacción sostenida con el mismo, por lo que el alumno deberá enfrentarse a problemas que sean *fuente* de nuevos conocimientos y también a problemas que permitan *resignificar* tales conocimientos. En función de los conocimientos de los que dispongan los alumnos, un mismo problema puede ser fuente de nuevas nociones para un grupo y puede promover su resignificación para otro.

Ahora bien, la resolución de problemas es una condición necesaria pero no suficiente para aprender Matemática: no aprenden lo mismo quienes resuelven un problema y luego pasan a otro y luego a otro, que quienes resuelven esos mismos problemas –individualmente o en grupo– y luego reflexionan y discuten acerca de los procedimientos utilizados y las soluciones obtenidas. Estos intercambios permiten explicitar los procedimientos realizados y analizar la vinculación entre las diferentes producciones, argumentar a partir de los cuestionamientos de otros compañeros para defender el propio punto de vista y formular sus objeciones. El pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, modificarlo. Este trabajo, que implica también ubicar el conocimiento en cuestión en una red de conceptos a él vinculados, y analizar las diferentes relaciones, depende de la gestión que realice el docente en el aula.

Respecto de la temática seleccionada, queremos destacar que los números racionales constituyen un campo de contenidos complejo, que comienza a construirse en cuarto o quinto año de la escuela primaria y continúa a lo largo de la escuela secundaria, pero que supone rupturas importantes con los conceptos y prácticas que los alumnos han elabo-

[1] Régine Douady señala que en la mayoría de los conceptos matemáticos pueden intervenir distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico.

rado a lo largo de su escolaridad. Diferentes investigaciones confirman que los alumnos intentan generalizaciones abusivas del comportamiento de los números naturales a los números racionales; es decir, tratan a estos últimos como si fueran naturales, y la experiencia nos dice que esto se prolonga a lo largo de la escuela secundaria generando múltiples errores. Frente a esto, ¿qué se puede hacer para que los alumnos aprendan este campo numérico respetando su sentido?

Actividad 2 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Desde su experiencia, plantee qué dificultades observa en la enseñanza y en el aprendizaje de los números racionales.

Actividad 3 (para discutir en el encuentro presencial)

Primera Parte

Presentamos a continuación una actividad y su análisis. Sin avanzar en la lectura del módulo, indique cómo es posible resolver los siguientes cálculos *sin utilizar algoritmos*. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis.

a) $7 \times \frac{1}{7}$ $\quad 9 \times \frac{1}{9}$ $\quad 28 \times \frac{1}{28}$ $\quad 127 \times \frac{1}{127}$

b) $5 \times ...... = 1$ $\quad \frac{1}{8} \times .... = 1$ $\quad \frac{1}{11} \times ..... = 2$ $\quad 25 \times ..... = 4$

c) $\frac{2}{3} \times ..... = 2$ $\quad \frac{2}{3} \times ..... = 4$ $\quad \frac{4}{5} \times ..... = 3$ $\quad \frac{2}{3} \times ..... = 1$

d) ¿A qué conclusiones es posible arribar a partir de la resolución de estos cálculos?

Segunda Parte

En el Diseño Curricular, lea el apartado "La enseñanza de la matemática en la ES" y seleccione tres frases que puedan vincularse con las conclusiones obtenidas.

Análisis de la actividad

Los cálculos planteados en el **punto a** pueden resolverse a partir de la definición de fracción.[2] Dado que todos dan por resultado 1, es posible generalizar una "propiedad": el producto de un número no nulo a y $\frac{1}{a}$ es siempre 1. Ahora bien, es probable que tal propiedad no sea explicitada por los alumnos de este modo, sino que la usen de forma más o menos implícita.

En el **punto b** se apela a la misma relación, pero iluminada desde otro lado. En este caso, se trata de que los alumnos puedan identificar la relación entre el valor de cada parte y la cantidad de partes que se necesitan para llegar a formar el entero.

Una manera de obtener un producto que dé 1 es usando dos factores del tipo *a* y $\frac{1}{a}$. Esto significa que en el primer caso el número buscado es $\frac{1}{5}$ y en el segundo es 8.

Para encontrar el número que falta en $\frac{1}{11} \times ..... = 2$ puede usarse una relación de proporcionalidad: es el doble del número que multiplicado por $\frac{1}{11}$ da 1, es decir, el doble de 11.

Otra forma de pensarlo es a partir de las propiedades del producto. Es decir, como $\frac{1}{11} \times 11 = 1$, entonces $\left(\frac{1}{11} \times 11\right) \times 2 = 2$. Y aplicando la propiedad asociativa del producto resulta: $\frac{1}{11} \times (11 \times 2) = 2$, o sea $\frac{1}{11} \times 22 = 2$

Puede considerarse, incluso, otra manera de pensar este problema. Para obtener 2 usando onceavos es necesario tener 22. Por lo tanto, $2 = \frac{22}{11}$, pero $\frac{22}{11}$ son 22 veces $\frac{1}{11}$. Luego, $22 \times \frac{1}{11} = \frac{1}{11} \times 22 = 2$

Los cálculos propuestos en el **punto c** se apoyan en las mismas relaciones que se usaron en las partes anteriores.

Para resolver $\frac{2}{3} \times ..... = 2$, los alumnos pueden pensarlo como $\frac{3}{3} = 1$, entonces se necesitan $\frac{6}{3}$ para tener 2, por lo tanto hay que multiplicar $\frac{2}{3}$ por 3. Es interesante discutir con los alumnos cuál es la relación que se establece entre ese procedimiento y la división 6:3 = 2, puesto que es una nueva oportunidad para identificar la fracción como cociente entre números naturales.

[2] En principio, hay dos formas de definir una fracción. Por ejemplo, para definir $\frac{1}{n}$ podemos decir que es una de las partes que se obtiene al partir un entero en ***n*** partes iguales. También puede considerarse como la parte tal que con ***n*** de ellas se forma el entero. Estas dos maneras de definir fracción son equivalentes y permiten tener en cuenta diferentes aspectos: en un caso se va del entero a las partes; en el otro, de las partes al entero.

Para resolver $\frac{2}{3}\times\ldots\ldots=4$ podrán pensar en el doble de $\frac{6}{3}$, o podrán ir sumando de a $\frac{3}{3}$, o sea, $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=\frac{6}{3}=2$; $\frac{6}{3}+\frac{3}{3}=\frac{9}{3}=3$; $\frac{9}{3}+\frac{3}{3}=\frac{12}{3}=4$. Por lo tanto, hay que multiplicar $\frac{2}{3}$ x 6 $=\frac{12}{3}$ y $\frac{12}{3}=4$, ya que 12:3 = 4

En el caso de $\frac{4}{5}\times\ldots\ldots=3$, se puede pensar:

$\frac{4}{5}=4\times\frac{1}{5}$	Según la definición de fracción
$4\times\left(\frac{1}{5}\times5\right)=4$	Porque $\frac{1}{5}\times5=1$
$4\times\left(\frac{1}{5}\times5\right)\times\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{4}=1$	Porque si un producto da 4, al multiplicarlo por $\frac{1}{4}$ da 1
$4\times\left(\frac{1}{5}\times5\right)\times\frac{1}{4}\times3=3$	Porque si un producto da 1, al multiplicarlo por 3 da 3
$\left(4\times\frac{1}{5}\right)\times\left(5\times\frac{1}{4}\times3\right)=3$	Aplicando propiedad asociativa
$\frac{4}{5}\times\left(\frac{5}{4}\times3\right)=3$	Porque $4\times\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ y $5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
$\frac{4}{5}\times\frac{15}{4}=3$	Porque $\frac{5}{4}\times3=\frac{5}{4}+\frac{5}{4}+\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$

Para encontrar el número faltante en $\frac{2}{3}\times\ldots\ldots=1$ los alumnos que ya resolvieron cálculos del tipo de los anteriores pueden pensar que el número buscado tiene que ser la mitad de 3, ya que al multiplicar por 3 obtuvieron como resultado 2.

La mitad de 3 es 3:2 y se expresa $\frac{3}{2}$, entonces $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$

También, puede resolverse por partes:

como $\frac{2}{3}$ puede pensarse como $2\times\frac{1}{3}$, y sabemos que $\frac{1}{3}\times3=1$, entonces

$2\times\left(\frac{1}{3}\times3\right)=2$ y $2\times\left(\frac{1}{3}\times3\right)\times\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}=1$

Para determinar cuál es el número que multiplicado por $\frac{2}{3}$ da 1 aplicamos la propiedad asociativa en el primer miembro de la última igualdad:

$2\times\left(\frac{1}{3}\times3\right)\times\frac{1}{2}=\left(2\times\frac{1}{3}\right)\times\left(3\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$

La resolución de este tipo de cálculos permite obtener algunas conclusiones:

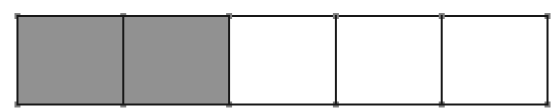
- siempre es posible encontrar un número que multiplicado por otro dé 1 (salvo para cero). Los números racionales tienen ***inverso multiplicativo***; es decir, dado un número racional $\frac{a}{b}$ existe otro número racional que llamamos $\frac{b}{a}$ que cumple $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$;
- si uno de los datos es un número natural a, el número que multiplicado por él da 1 es $\frac{1}{a}$. Esto marca un cambio respecto del campo de los números naturales. Allí, el único producto que da 1 es 1×1. Sin embargo, en el campo de los números racionales hay infinitos productos que dan 1;
- si se conoce un número racional expresado como fracción $\frac{a}{b}$, el número que multiplicado por ella da 1 es $\frac{b}{a}$;
- en el campo de los números racionales es posible pasar multiplicativamente de cualquier número no nulo a cualquier otro. Por ejemplo, si se quiere buscar el número que multiplicado por 32 da 27, es posible plantear:

$32\times\frac{1}{32}=1$, entonces $32\times\left(\frac{1}{32}\times27\right)=27$. De aquí surge que $32\times\frac{27}{32}=27$

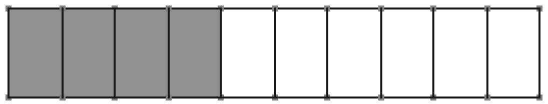
Se ha propuesto resolver por cálculo mental algo que en la escuela habitualmente se hace por medio de algoritmos convencionales. ¿Cuál es el sentido de hacer esta propuesta en un espacio de capacitación? ¿Qué cuestiones de la enseñanza de este objeto matemático queremos poner en discusión? Centralmente, lo que se busca es poner de manifiesto que si bien es cierto que los alumnos pueden llegar al resultado de las operaciones a través del algoritmo de esa manera no identificarán, ni pondrán en juego, relaciones y reflexiones sobre ellas.

Así, por ejemplo, al calcular $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}$ utilizando el algoritmo se negará la posibilidad de que el alumno establezca la equivalencia entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$, pensando que al doble de la cantidad total de partes (el denominador) le corresponde el doble de la cantidad de partes tomadas (el numerador), y así mantener iguales las cantidades.

Si bien los alumnos deberían conocer el origen de esta propiedad, un gráfico puede ayudar a que le encuentren sentido. A continuación, se representan $\frac{2}{5}$ de un entero:



Una manera de obtener décimos es dividir cada quinto por la mitad:



Por último, deberá sumar $\frac{4}{10}+\frac{3}{10}$

No es necesario operar solamente a través de los métodos convencionales (aunque en algunos casos resulte más económico), en tanto que el cálculo mental es una herramienta muy eficiente. Lo que se busca promover son intervenciones del docente dirigidas a que los alumnos reflexionen sobre la posibilidad de sumar mentalmente fracciones en las que uno de los denominadores es múltiplo del otro, y así expresar una con el denominador de la otra para operar con ellas.

Las relaciones entre fracciones son un apoyo para los cálculos mentales. ¿Por qué $\frac{1}{10}$ es la mitad de $\frac{1}{5}$? Si bien no hay una sola forma de explicar la relación anterior, la definición de fracción permite mostrarla: se necesitan 5 partes de $\frac{1}{5}$ ó 10 de $\frac{1}{10}$ para armar 1. Como la cantidad de décimos es el doble de la cantidad de quintos, entonces cada décimo tiene que ser la mitad de cada quinto. Como consecuencia de esto es posible afirmar que en cada quinto hay 2 de $\frac{1}{10}$, o sea, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$

Si $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$, entonces $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ y $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

Actividad 4 (autocorrección)

Primera Parte

Presentamos a continuación algunos problemas y la actividad matemática que involucran. A la luz de la caracterización de problema incluida en el apartado "La enseñanza de la Matemática en 2º", analice el trabajo matemático que involucran y confronte sus reflexiones con los correspondientes comentarios.

a) Forme $\frac{3}{4}$ usando sólo medios y octavos.

b) ¿Es posible formar $\frac{1}{2}$ sumando varias veces $\frac{1}{3}$? ¿Y como suma de varios $\frac{1}{5}$? ¿Y con $\frac{1}{6}$? ¿Y con $\frac{1}{8}$? Explique por qué.

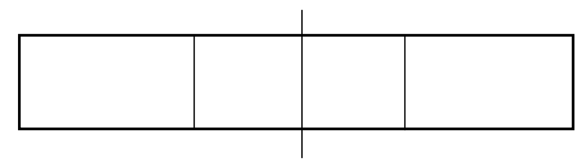
Segunda Parte

En el Diseño Curricular, lea el apartado "Expectativas de logro" e identifique aquellas expectativas con las que pueden vincularse los problemas considerados.

Comentarios acerca del trabajo matemático

En los problemas incluídos en la primera parte se pone en juego la equivalencia entre fracciones. En el primer caso, es necesario encontrar cuántos octavos hay en $\frac{1}{4}$. Un procedimiento que seguramente surgirá es: $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$ ya que $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ y $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, es decir que $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

En el segundo problema, algunos alumnos pueden pensar que no es posible formar $\frac{1}{2}$ usando sólo tercios; es decir, que se pueden armar medios utilizando cuartos pero no tercios. Incluso, puede suceder que se valgan de un gráfico como el siguiente:



A partir de ello, pueden plantear: "Para armar $\frac{1}{2}$ con tercios tengo que hacer $\frac{1}{3}$ más medio tercio". Como la mitad de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$, no se puede expresar $\frac{1}{2}$ con tercios. Por tal razón, calcular $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ permitirá reinvertir lo que aprendieron a propósito de resolver por cálculo mental la suma de fracciones con diferente denominador.

Hacer Matemática en la ES

Desde la perspectiva adoptada en nuestra jurisdicción, se considera que la matemática es tanto un **producto cultural**, en su condición de resultado de la actividad humana, como un **producto social**, que surge de la interacción entre diferentes personas pertenecientes a una misma comunidad. Concebirla de este modo, supone que para aprender matemática los alumnos deberán vivenciar la forma particular de hacer y de pensar en esta disciplina.

Actividad 5 (para discutir en el encuentro presencial)

Lea el texto que se reproduce en el Anexo 1 y establezca relaciones con las siguientes frases del Diseño Curricular:
• "En la ESB las situaciones que se planteen deberán ir más allá de la aplicación de los conceptos. Deberá analizarse el funcionamiento de los conocimientos como herramientas para la solución de problemas desde un punto de vista que ayude a reconocer la necesidad de generalizaciones y permita pensar las nociones construidas como objetos matemáticos".
• "Las generalizaciones a las que los alumnos arriban deberán ser producto de un proceso de reflexión sobre el trabajo realizado a partir de:
La discusión con los pares y el docente y las argumentaciones de las estrategias utilizadas".

A modo de cierre

A partir de lo trabajado, es posible destacar los siguientes aspectos:
• las nociones no se aprenden de una vez y para siempre, necesitan ser tratadas una y otra vez en distintos ámbitos y estableciendo relaciones entre ellas;
• si tendemos a entramados en una organización, en la que las distintas nociones que forman un campo de conceptos se relacionen unas con otras, se favorecerá la constitución de un verdadero aprendizaje sostenido en el tiempo; lo que no implica, de ninguna manera, que estemos suponiendo ***enseñar todo a la vez***;
• como se abordará en sucesivos encuentros, cuando aparecen conclusiones de la índole de lo trabajado en la actividad 3 es deseable que queden escritas para poder ser estudiadas por los alumnos, o bien para que el docente apele a ellas en otro momento.

Actividad 6 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Vuelva sobre la actividad 2 y, de ser necesario, reformúlela. Justifique en cualquier caso.

Unidad 2

Diferentes sentidos de las fracciones

Como todos los conceptos matemáticos, los números racionales ponen de relieve diferentes aspectos en función de los distintos usos. Entre otras cosas, un número racional puede expresar:
• una relación entre las partes que forman un todo;
• el resultado de un reparto, vinculado de este modo a la división entre naturales;
• el resultado de una medición, expresando entonces la relación con una unidad;
• una constante de proporcionalidad que tendrá un significado preciso en función del contexto (velocidad, porcentaje, escala);
• la probabilidad de un suceso.

Durante 2º año se profundizará el tratamiento de dos de los sentidos mencionados: las fracciones en el contexto de la medida y las fracciones en el contexto de la proporcionalidad.

Como las fracciones en el contexto de la medida seguramente ya fueron estudiadas en años anteriores, la intención es que durante este año el docente complejice los problemas bloqueando la posibilidad de fraccionar la unidad o de apelar a una unidad auxiliar, ya que de lo contrario los alumnos movilizarán las estrategias que conocen de sus anteriores experiencias de medición.

Secuenciación de actividades: las fracciones en el contexto de la medida

Actividad 7 (para discutir en el encuentro presencial)

Presentamos a continuación una secuencia de problemas y su análisis. Le proponemos que seleccione dos problemas: uno para trabajar previamente y otro para trabajar posteriormente. En cada caso, explique por qué los seleccionó.

Secuencia

Problema 1

A partir de los siguientes dibujos que representan varillas indique:

a) ¿Cuántas varillas D se necesitan para formar la varilla A?

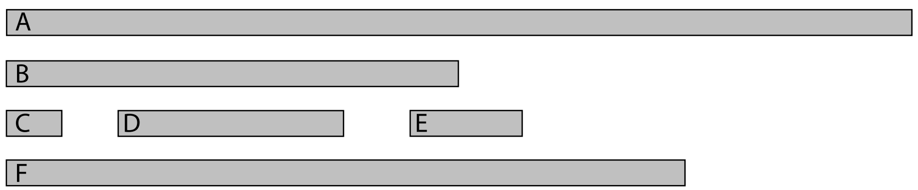
b) ¿Qué parte de la varilla A es la varilla E?

c) ¿Qué parte de la varilla A es la varilla F?

d) ¿Cuántas varillas E se necesitan para formar la varilla B?

e) Si se quiere cortar la varilla A para obtener todas varillas del tamaño de la C, ¿cuántos cortes hay que hacer y dónde?

Para responder estas preguntas, puede usar regla no graduada y compás.

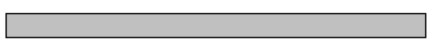


Problema 2

La siguiente varilla mide $\frac{1}{4}$ de una cierta unidad. Dibuje una varilla que mida $\frac{5}{8}$ de la misma unidad.

Problema 3

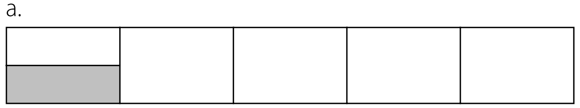
A una varilla se le sacó $\frac{1}{3}$ de su longitud y quedó del siguiente tamaño. Dibuje la varilla entera.



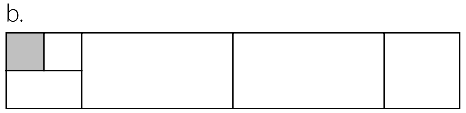
Problema 4

Determine qué parte del rectángulo está sombreada en cada caso.

a.



b.



Problema 5

A partir de las siguientes varillas indique:

¿Qué parte de la varilla A es la varilla B?

¿Cuánto mide la varilla A si se considera como unidad de medida la varilla B?

Análisis de la secuencia

El **problema 1,** al preguntar cuántas varillas de un tipo forman otra, plantea una medición. Si la cantidad buscada no es entera, surge la necesidad de usar fracciones.

Como se observa en el **punto a**, la varilla D entra 4 veces en la varilla A, entonces se puede afirmar que la varilla D es $\frac{1}{4}$ de la varilla A, que la varilla D *mide* $\frac{1}{4}$ *de varilla A* o *que la varilla A mide 4 varillas D*.

En este caso es importante recordar que $\frac{1}{4}$ es:

- **aquella cantidad que repetida 4 veces permite obtener un entero;**
- **cada una de las partes que se obtiene al partir un entero en cuatro partes iguales.**

La varilla E entra 8 veces en la varilla A, por lo tanto, será $\frac{1}{8}$ de A.

De la misma forma, es posible determinar que la varilla F es $\frac{3}{4}$ de la varilla A, que 4 varillas E arman la B y, luego, que la varilla B es la mitad de la A. En este caso se recordará que $\frac{3}{4}$ es una cantidad que resulta de repetir 3 veces la cantidad $\frac{1}{4}$.

La varilla C entra 16 veces en la varilla A, por lo tanto su longitud será $\frac{1}{16}$ de la longitud de la varilla A. Entonces, la varilla A debe ser cortada en 16 partes iguales para que todas tengan la misma longitud de la varilla C.

Las medidas de las varillas y las relaciones entre sus longitudes permiten obtener relaciones entre fracciones:

2 de $\frac{1}{2}$ es 1	8 de $\frac{1}{8}$ es 1	16 de $\frac{1}{16}$ es 1
4 de $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{2}$	2 de $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{4}$	8 de $\frac{1}{16}$ es $\frac{1}{2}$
4 de $\frac{1}{16}$ es $\frac{1}{4}$	2 de $\frac{1}{16}$ es $\frac{1}{8}$	

Las tres primeras relaciones provienen de la definición de cada una de estas fracciones; las demás muestran relaciones sólo entre algunas de ellas. A modo de síntesis se resaltará que, en general, **es posible decir que la fracción $\frac{1}{n}$ es una cantidad que verifica que *n* veces esa cantidad es 1. La cantidad $\frac{m}{n}$ representa *m* veces la cantidad $\frac{1}{n}$.**

También es posible afirmar que:

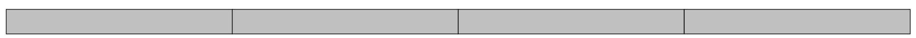
- $\frac{1}{2}$ es la mitad de 1 y 1 es el doble de $\frac{1}{2}$, 2 veces $\frac{1}{2}$ es 1;
- $\frac{1}{4}$ es la mitad de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ es el doble de $\frac{1}{4}$, 2 veces $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{2}$;
- $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ es el doble de $\frac{1}{8}$, 2 veces $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{4}$, y así sucesivamente.

Las relaciones elaboradas a propósito del problema 1 permiten abordar el **problema 2**.

Una forma de pensar en octavos teniendo como datos cuartos consiste en tener en cuenta que un octavo es la mitad de un cuarto; es decir, que 2 veces $\frac{1}{8}$ es $\frac{1}{4}$ (o que $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$).

Para resolverlo pueden, en principio, plantearse dos caminos:

- uno consiste en dibujar el entero reproduciendo 4 veces $\frac{1}{4}$:

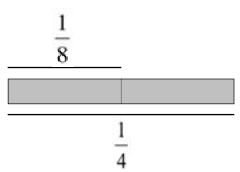


Luego se puede partir en 8 octavos y tomar 5 para armar $\frac{5}{8}$.

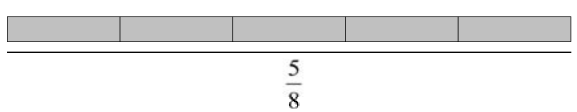
Para reconstruir el entero a partir de una parte es necesario tener en cuenta la cantidad de partes necesarias; en este caso se trata de 4, porque 4 veces $\frac{1}{4}$ es 1. Una vez que se tiene el entero se va nuevamente hacia las partes.

Las dos definiciones equivalentes de fracción que hemos presentado permiten un "ida y vuelta" entre una parte y el entero.

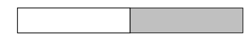
- otro camino consiste en partir por la mitad la varilla de $\frac{1}{4}$ de la unidad. Cada una de esas partes tiene una longitud de $\frac{1}{8}$:



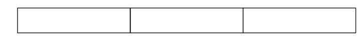
Con 5 veces la varilla de $\frac{1}{8}$ se obtiene una longitud de $\frac{5}{8}$:



En el **problema 3**, para poder completar la varilla, es necesario saber qué parte del entero quedó al sacar $\frac{1}{3}$. Nuevamente, la definición de fracción permite saber que hay 3 partes de $\frac{1}{3}$ en un entero. Al quitar una de ellas lo que queda son 2 partes de $\frac{1}{3}$ que representan $\frac{2}{3}$ del entero. Como $\frac{2}{3}$ está formado por 2 veces $\frac{1}{3}$, resulta que $\frac{1}{3}$ es la mitad de $\frac{2}{3}$:



y que para dibujar toda la varilla alcanza con dibujar tres varillas de $\frac{1}{3}$.



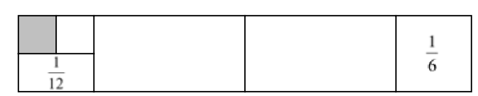
A lo largo de estos tres primeros problemas se presenta la oportunidad de usar la definición de fracción para medir, lo que permite establecer relaciones de doble y mitad entre algunas fracciones. En un segundo momento se plantea la reconstrucción del entero a partir de una de sus partes, lo que requiere reutilizar las relaciones elaboradas en el primer problema y la definición de fracción. Avanzando aún más, se plantea el cálculo de una diferencia apoyándose en la definición de fracción para luego reconstruir el entero. Como se desprende de la secuencia, cada uno de los problemas permite apoyarse en los anteriores para plantear a partir de ahí un avance en el conocimiento y en las relaciones.

En el **problema 4**, en tanto, las fracciones se utilizan para comparar áreas.

En el **ítem a** el rectángulo fue dividido en 5 partes iguales, entonces cada una es $\frac{1}{5}$. Uno de esos quintos ha sido dividido en dos partes iguales, entonces la parte sombreada es la mitad de $\frac{1}{5}$, es decir, $\frac{1}{10}$. Esto es así porque como cada quinto entra 5 veces en el entero, su mitad entrará 10 veces.

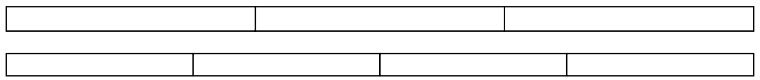
Otro camino consiste en analizar que la parte sombreada entra 10 veces en el rectángulo, por lo tanto el área sombreada será $\frac{1}{10}$ del área del rectángulo.

En el **ítem b** no es fácil darse cuenta que parte representa cada subdivisión. Sin embargo, los rectángulos que se encuentran a la izquierda y a la derecha son iguales y representan $\frac{1}{6}$ del rectángulo pues cada uno entra 6 veces en el rectángulo grande. Uno de estos rectángulos, en tanto, está partido por la mitad, por lo que cada parte es $\frac{1}{12}$. Entonces, el área de la región sombreada es la mitad de $\frac{1}{12}$, que es $\frac{1}{24}$ del área del rectángulo.



Es importante tener en cuenta que cuando se trata de calcular o comparar áreas, frecuentemente es necesario recurrir a las fracciones ya que es casi imposible encontrar una unidad que no sea necesario partir.

En función de lo desarrollado en los problemas anteriores es posible resolver el **problema 5**. Una forma consiste en dibujar varias varillas A y varias varillas B hasta lograr que coincidan:



Así, se ve que 3 varillas A tienen la misma longitud que 4 varillas B: 3×A = 4×B. De aquí se puede concluir que la varilla B mide $\frac{3}{4}$ de A, es decir que B puede medirse tomando a A como unidad de medida.

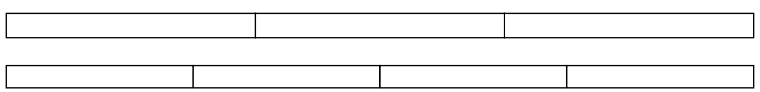
Esta relación también permite afirmar que la longitud de la varilla A es $\frac{4}{3}$ de B, luego A puede medirse tomando a B como unidad de medida.

Es importante tener en cuenta que:

- cuando se mide se establece una comparación. Se elige una unidad de medida y se intenta determinar cuántas veces entra esa unidad en el objeto que se quiere medir;
- si la unidad de medida que se elige es menor que el objeto a medir, el número que representa la medida será mayor que 1;
- si la unidad de medida que se elige es mayor que el objeto que se quiere medir, el número que representa la medida será menor que 1.

¿Cuál será la longitud de una varilla que entre una cantidad entera de veces en la varilla A y una cantidad entera de veces en la varilla B?

A partir del dibujo que dé 3 varillas A y 4 varillas B, podemos pensar que ambos forman parte de un mismo entero:



Resulta que la varilla A es $\frac{1}{3}$ y la varilla B $\frac{1}{4}$ de un cierto entero. Por lo tanto, una varilla que sea $\frac{1}{12}$ del entero entrará 4 veces en la varilla A y 3 veces en la varilla B. Hemos determinado que una varilla que mida $\frac{1}{12}$ del entero es una unidad de medida común a los segmentos A y B que verifica que tanto A como B son múltiplos enteros de la unidad:

A = $4\times\frac{1}{12}$ y B = $3\times\frac{1}{12}$

Ahora bien, esta no es la única unidad de medida común a ambas varillas. Si se considera, por ejemplo, una varilla que mida la mitad de la unidad anterior, esto es, $\frac{1}{24}$ del entero, resulta que: A = $8\times\frac{1}{24}$ y B = $6\times\frac{1}{24}$

Lo mismo puede hacerse para otras unidades, e incluso puede observarse que al duplicarse el denominador de la unidad también se duplica la cantidad de veces que está contenida en cada uno de los segmentos. Dicho de otra manera, si la unidad es la mitad de otra, entonces entra el doble de veces en la misma medida.

A partir de este problema se destacará que **dados dos segmentos A y B que verifican que m.A = n.B para ciertos números naturales m y n, entonces existe un segmento C que es una medida común a A y B (es decir, existe un segmento C que entra una cantidad de veces exactas en A y otra cantidad de veces exacta en B). En este caso, se dice que los segmentos A y B son conmensurables.**

La conmensurabilidad no es una propiedad exclusiva de la longitud, sino que se extiende a otras magnitudes. Es una característica de los números racionales y puede expresarse diciendo que siempre es posible encontrar una unidad de medida común con la característica de que cada uno de los números medidos es una cantidad entera de veces esa unidad. No vamos a hacer una demostración exhaustiva pero creemos que el método desarrollado en el ejemplo para encontrar una unidad de medida común es fácilmente extrapolable a cualquier otro par de fracciones.

Actividad 8 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Considere que ha desarrollado con sus alumnos la secuencia analizada en este encuentro y sugiera, luego de leer en el DC el punto *Sobre la evaluación*, una actividad para evaluar sus aprendizajes. Justifique su propuesta.

Aproximaciones a la noción de número irracional

Actividad 9 (para discutir en el encuentro presencial)

Antes de avanzar con la lectura, ¿cómo cree que puede hacer para que los alumnos interpreten la noción de inconmensurabilidad en 2º de la ES? Justifique su propuesta.

Al abordar la problemática de la irracionalidad, Luis Rico (1996) afirma:

> Situándonos en la perspectiva del curriculum de matemáticas de la Educación Secundaria, a partir de los conocimientos aritméticos de nuestros alumnos, el problema de la irracionalidad, simplemente, no tiene lugar. Así pues, su introducción a los estudiantes requiere de una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático. Esta modificación no se produce espontáneamente, mientras se evita el problema de la irracionalidad y se pospone a la espera de que la presentación formal del concepto solucione un conflicto que no se entiende como tal, porque nunca ha sido planteado. El problema de la irracionalidad adquiere plena significación en el contexto geométrico, más concretamente, en el terreno de la medida. "Sin la presión de los problemas de la medida, R no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados" (Douady, 1980).
> La idea intuitiva inicial de que dos magnitudes, y más concretamente, dos longitudes, tienen una parte alícuota común es, sin duda, una etapa inevitable en el desarrollo del conocimiento matemático, tanto en el plano histórico como en el plano individual. Pero esta intuición puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del problema de *la irracionalidad*.

¿Es posible aprender en contra de la intuición? ¿De qué manera? Rico señala:

> Es absolutamente imposible constatar la inconmensurabilidad sobre una figura; al contrario, de la experiencia práctica e inmediata se sigue la conmensurabilidad, ya que la percepción y las necesidades prácticas se satisfacen en un número finito de pasos. Así que la conmensurabilidad no puede concernir más que a objetos matemáticos ideales, y no puede mostrarse, sino que precisaría entonces de una demostración en el sentido de deducción a partir de unos axiomas.

Se plantea, entonces, el problema de cómo es posible demostrar la inconmensurabilidad desde el punto de vista aritmético pero con un basamento geométrico. Sabemos que una manera de eludir los procesos infinitos de aproximar los irracionales por racionales es usando una demostración por el absurdo, muy conocida por todos los docentes. Sin embargo, este tipo de demostración requiere de un proceso de comprensión por parte de los alumnos y no necesariamente está disponible en un nivel introductorio.

La siguiente es una demostración por el absurdo que supone *un trabajo sostenido* para comprender las ideas subyacentes:

La medida de cualquier segmento conmensurable puede expresarse como una fracción. Si se considera un cuadrado de lado 1, a través del teorema de Pitágoras puede determinarse que sus diagonales miden $\sqrt{2}$. Si esta medida fuera racional, entonces sería posible expresarla como una fracción. Supongamos que esa fracción existe, es $\frac{a}{b}$, y que es irreducible (está simplificada). Luego, $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Si $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, entonces el cuadrado de $\frac{a}{b}$ es 2: $\frac{a^2}{b^2} = 2$.

Esta última igualdad puede ser expresada también como $a^2=2.b^2$, que significa que a^2 es par, ya que resulta de multiplicar 2 por otro número entero. Luego a es par.[3]

Pero a^2 es un número entero al cuadrado, luego todos sus factores deben aparecer una cantidad par de veces. Si uno de sus factores es 2, entonces tiene que estar como mínimo al cuadrado. Como hay un 2 multiplicando a b^2, el otro 2 tiene que estar en b^2.

Eso quiere decir que b^2 también tiene que ser par, y por tanto b también es par.

Pero si a es par y b también, la fracción $\frac{a}{b}$ no es irreducible, como habíamos supuesto. Llegamos a una contradicción, porque comenzamos suponiendo que $\sqrt{2}$ podía expresarse como una fracción irreducible y luego de una serie de pasos correctos obtuvimos que la misma fracción no era irreducible.

Por tanto, lo que habíamos supuesto era falso: no existe ninguna fracción irreducible que sea igual a $\sqrt{2}$ o, lo que es lo mismo, $\sqrt{2}$ no es un número racional, es un número irracional. Un segmento de esta medida no es conmensurable con ningún otro de medida racional, es decir, no puede expresarse como un múltiplo entero de un racional.

Secuenciación de actividades: las fracciones en el contexto de la proporcionalidad

Actividad 10 (autocorrección)

Presentamos a continuación una secuencia de problemas. Sin avanzar con la lectura del análisis, identifique los posibles procedimientos que pueden utilizar los alumnos y las dificultades que se les pueden presentar. Asimismo, señale los criterios de secuenciación que pueden haber orientado su elaboración. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis que se incluye a continuación.

[3] Para afirmar que *a* es par nos apoyamos en una propiedad de los números enteros: un número es par si y solo si su cuadrado es par.

Problema 1

Para preparar mermelada de naranjas, en una fábrica utilizan 2 kg de azúcar cada 3 kg de naranjas.

a. Si se usaron 6 kg de naranjas, ¿cuántos kilos de azúcar se habrán utilizado?

b. Para preparar mermelada del mismo gusto se usaron 4 kg de naranjas, ¿cuántos kg de azúcar se habrán utilizado?

c. Un empleado agregó dos kilos de azúcar y dos kilos de naranjas a la preparación original, ¿obtuvo mermelada del mismo gusto?, ¿por qué?

Problema 2

¿Con cuál de las siguientes preparaciones se obtiene una mermelada más dulce que la que preparan en la fábrica del problema 1?

Preparación 1: 5 kg de azúcar y 7 kg de naranjas

Preparación 2: 10 kg de azúcar y 15 kg de naranjas

Preparación 3: 750 gr de azúcar y 2 kg de naranjas

Problema 3

Para hacer mermelada se utilizaron 11 kg de naranjas con 9 kg de azúcar.

a. ¿Con qué otras cantidades de azúcar y de naranjas se obtendrá mermelada del mismo gusto?

b. ¿Será posible encontrar una fórmula que permita, conociendo la cantidad de kilos de naranjas, obtener la cantidad de kilos de azúcar?

c. ¿Y otra que permita obtener la cantidad de kilos de naranjas conociendo la cantidad de kilos de azúcar?

Análisis de la secuencia

En el **problema 1**, el **ítem a** se resuelve sin dificultad: si se duplican los kilos de naranjas se deben duplicar los kilos de azúcar. Es decir, para 6 kilos de naranjas se necesitan 4 kilos de azúcar.

En el **ítem b** no es casual preguntar por 4 kg de naranjas: algunos alumnos pueden pensar que dado que se usa 1 kg más de naranjas se debe agregar 1 kg a la cantidad de azúcar; es decir, que son necesarios 3 kg de azúcar.

Es importante tener en cuenta que ciertas características de una situación de enseñanza pueden ser modificadas por el docente, lo que cambia, en consecuencia, tanto las estrategias de resolución que utilizan los alumnos como los conocimientos que se ponen en juego. En este caso, la elección de los valores 3 y 4 permite evidenciar un error muy frecuente: la utilización de modelos aditivos en problemas multiplicativos. Cuando se trata de duplicar, como en el ítem a, no surgen tales dificultades.

Dentro de las resoluciones correctas hay varios caminos posibles. Uno de ellos es calcular la cantidad de kilos de azúcar que se necesita para 1 kg de naranjas ($\frac{2}{3}$, que es la constante de proporcionalidad) y multiplicar los 4 kg por $\frac{2}{3}$.

Utilizando el mismo procedimiento, es posible que algunos alumnos expresen la constante de proporcionalidad en forma decimal y multipliquen 4 kg por 0,66. De suceder, es necesario que los alumnos identifiquen que de ese modo se obtiene una respuesta aproximada. Esto requiere reconocer que $\frac{2}{3}$ es un número y no una operación a realizar, a pesar de la relación entre las fracciones y la división.

El **ítem c** permite retomar lo trabajado anteriormente: sumando la misma cantidad de kilos de naranja y de kilos de azúcar no se obtiene el mismo gusto.

En función de lo trabajado, algunos alumnos calcularán la cantidad de kilos de azúcar que se necesitan para 1 kilo de naranjas y realizarán la comparación correspondiente. En este caso no habría inconvenientes en trabajar con expresiones decimales, pues para comparar 0,66… y 0,8 es posible trabajar con una aproximación de 0, 66…

Otra posibilidad es estudiar qué pasaría con ambas mezclas para 15 kilos de azúcar.

Primera preparación		Segunda preparación	
Kilos de naranjas	Kilos de azúcar	Kilos de naranjas	Kilos de azúcar
3	2	5	4
15	10	15	12

La lectura de los datos de la tabla permite determinar que la nueva preparación es más dulce, sin necesidad de comparar números racionales.

Otra estrategia posible es encontrar fracciones equivalentes a las dadas, ya sea con igual numerador o igual denominador y compararlas.

$\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ o bien $\frac{60}{75} > \frac{60}{90}$

El **problema 2** permite reinvertir cualquiera de las estrategias utilizadas en el problema anterior. En el caso de las preparaciones 1 ó 2, la comparación se realiza del mismo modo que en ese problema. En la preparación 3, en tanto, se ha utilizado otra unidad (gr), lo que inhibe la comparación directa y exige hacer primero un cambio de unidades.

En el **problema 3**, para responder al **ítem a** los alumnos deberán encontrar fracciones equivalentes a $\frac{9}{11}$ ó a $\frac{11}{9}$, e interpretar que es posible encontrar infinitas fracciones equivalentes a ambas, por lo que las combinaciones posibles también son infinitas. En este problema la equivalencia de fracciones se interpreta en términos del "mismo gusto".

Es importante tener en cuenta que en el contexto de la proporcionalidad dos fracciones son equivalentes porque representan la misma relación. Posteriormente, los alumnos deberán producir una fórmula que permita calcular la cantidad de kilos de azúcar conociendo la cantidad de kilos de naranjas (ítem b), y otra que permita calcular la cantidad de kilos de naranjas conociendo la cantidad de kilos de azúcar (ítem c).

Seguramente, la constante de proporcionalidad aparecerá expresada mediante diferentes fracciones, lo que permitirá retomar el trabajo acerca de fracciones equivalentes realizado anteriormente.

Si algunos alumnos expresan la constante mediante una aproximación decimal, es necesario considerar la pertinencia.

Actividad 11 (para discutir en el encuentro presencial)

Presentamos a continuación una situación de enseñanza, adaptada de la propuesta por Guy Brousseau (1983), y su análisis. Le proponemos que resuelva el problema –tal como se pide en el enunciado y detallando sus razonamientos en una hoja– y responda luego a los siguientes interrogantes. Posteriormente, confronte sus respuestas con el análisis.

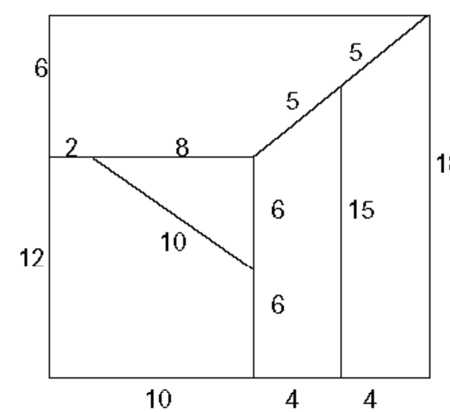
- ¿Qué procedimientos podrían utilizar los alumnos para calcular las medidas de los lados ampliados?
- ¿Qué errores supone que podrían cometer los alumnos al resolver este problema?
- En función de los procedimientos y errores que ha anticipado, ¿qué intervenciones docentes puede prever?

Situación de enseñanza

La clase se organiza en grupos de tres o cuatro integrantes. A cada grupo se le entrega el dibujo de un rompecabezas como el de la figura. Los alumnos cuentan con elementos para armar un nuevo rompecabezas.

Problema 1

Hay que agrandar el rompecabezas, de manera tal que el lado que mide 4 cm pase a medir 7 cm. Cada integrante del grupo debe ocuparse de agrandar al menos una de las piezas en forma individual. Una vez que hayan terminado deben poder armar entre todos el nuevo rompecabezas.



Análisis de la situación

El problema del rompecabezas favorece la aparición de diversos procedimientos de cálculo. Esto se debe a que cada alumno se encarga de la ampliación de una pieza. Si el nuevo rompecabezas no se arma, todo el grupo deberá revisar las estrategias de cálculo y de construcción de cada integrante, y determinar si una o varias son erróneas. De esta manera, luego de una etapa de resolución individual, los alumnos deberán explicitar las estrategias utilizadas para comunicarlas a sus compañeros, discutirlas y estudiar su validez.

El docente debería evitar tomar partido en las discusiones, para no dar pistas acerca de la resolución. No estamos diciendo que no debe intervenir en absoluto; si la situación está bloqueada, es su responsabilidad intervenir para hacer una devolución del problema con información que permita a los alumnos pensar en una posible estrategia de resolución, pero sin resolverles el problema.

En la etapa de discusión colectiva cada grupo dará a conocer al resto de la clase el procedimiento que ha utilizado para resolver. Si el rompecabezas no se ha formado, habrá que analizar cuáles son las razones por las que esto ocurrió. En cambio, si el rompecabezas se formó los alumnos deberán explicitar sus procedimientos y justificar las razones de su validez. Como se observa, en ambos casos el trabajo de discusión es fértil para explorar el contenido que se aborda. En esta instancia el docente tiene un rol fundamental, porque es quien sostiene y orienta la discusión mediante sus intervenciones.

Las estrategias que utilizan los alumnos para la resolución de problemas, así como las afirmaciones que formulan en torno a ellas, están implícitamente acompañadas por un supuesto de validez. La *validación*[4] es la instancia en la que los alumnos justifican ese supuesto, es decir, se responsabilizan matemáticamente de sus respuestas.

Notemos, por ejemplo, que una primera validación proviene de la situación misma: el nuevo rompecabezas se ensambla o no se ensambla, hecho que condiciona el estudio posterior acerca de las razones por las que esto ha ocurrido.

Como dijimos anteriormente, la manipulación de los valores del enunciado condiciona los procedimientos de resolución, favoreciendo o limitando la aparición de modelos implícitos (correctos o erróneos). Por ejemplo, si la transformación fuera al doble (de 4 a 8 cm) seguramente los alumnos duplicarían todos los lados y el rompecabezas ampliado se ensamblaría sin dificultad. Podríamos pensar que han utilizado un modelo multiplicativo y por lo tanto han reconocido a la proporcionalidad como el modelo pertinente; sin embargo, esto no necesariamente es así. Los alumnos suelen responder utilizando modelos aditivos (la duplicación puede explicarse con este modelo, ya que 8 cm = 4 cm + 4 cm). Y es común que en la transformación de 4 cm a 7 cm piensen que deben sumar 3 cm a todas las dimensiones. Ante su asombro, cuando construyen las piezas ampliadas, el rompecabezas no se vuelve a formar.

[4] Desde la conceptualización teórica de Claire Margolinas (1993) se denomina "fases de conclusión" a las instancias que posibilitan a los alumnos obtener información acerca de la validez o invalidez de su producción. Este autor distingue dos maneras opuestas en que una fase de conclusión puede llevarse a cabo:
· como una *fase de evaluación*, cuando se conduce a través de una comunicación directa por parte del docente haciendo explícita la corrección o incorrección de lo producido. Generalmente, en la enseñanza usual el docente sanciona rápidamente las producciones incorrectas y aporta inmediatamente las correctas, a través de correcciones parciales mientras los alumnos resuelven, o interrogando y/o proponiendo revisiones únicamente cuando la producción es errónea, o a través de gestos que dan cuenta de su desacuerdo, etc.;
· como una *fase de validación*, cuando es el alumno mismo, siempre bajo la responsabilidad del docente, quien debe buscar y decidir acerca de la validez de la producción.

La utilización de este modelo erróneo posibilita que se lo cuestione explícitamente y que se avance en la búsqueda del modelo adecuado. Es en este sentido que nos referimos a la necesidad de que el docente mantenga una actitud de aparente neutralidad mientras los alumnos resuelven y discuten. ¿Cómo podrían darse esos cuestionamientos si el docente realiza correcciones parciales alertando a los alumnos sobre la inconveniencia de utilizar modelos aditivos? En ese caso, es el docente quien advierte sobre un modelo erróneo y no los alumnos, lo que les quita la responsabilidad de analizar el efecto de sus decisiones.

Los alumnos pueden buscar la medida correspondiente a un segmento de 1 cm para, a partir de allí, encontrar la medida de cualquier otro segmento en el rompecabezas ampliado. Veámoslo en una tabla de valores:

: 4 . 7

Medida original (cm)	4	1	2	7
Medida ampliada (cm)	7	$\frac{7}{4}$	$\frac{14}{4}$	$\frac{49}{4}$

: 4 . 7

Otra forma de encontrar las medidas del rompecabezas ampliado consiste en usar este procedimiento:

- si el lado que mide 4 cm pasa a medir 7 cm, el que mide 8 cm medirá 14 cm (el doble) y el que mide 2 cm medirá 3,5 cm (la mitad);
- el lado que mide 6 cm medirá 7 cm + 3,5 cm = 10,5 cm (la suma de las medidas del lado correspondiente al de 4 cm y al de 2 cm);
- el lado que mide 12 cm tendrá por medida el doble de lado correspondiente al de 6 cm, 21 cm;
- la medida de la ampliación del lado de 18 cm puede obtenerse a partir de las medidas correspondientes a los lados de 12 cm y 6 cm, 31,5 cm;
- todas las demás medidas pueden obtenerse a partir de relaciones similares a las anteriores.

Una vez resuelto el problema, y luego de la discusión colectiva, el docente debe vincular los conocimientos puestos en juego por los alumnos con los saberes a los que apunta la actividad. En este caso, resaltando:

La situación del rompecabezas es de proporcionalidad, dado que si queremos que las nuevas figuras sean una ampliación de las originales, es decir, que sean semejantes, los lados de la nueva figura deben mantener la misma relación que tenían entre sí los lados de la figura original. Las medidas de los segmentos que forman el rompecabezas ampliado pueden obtenerse multiplicando las medidas originales por $\frac{7}{4}$.

Esta instancia, denominada *institucionalización*, es el momento de la clase en el que el docente establece las relaciones que existen entre las producciones de los alumnos y el saber al que se apunta con la actividad. Es importante notar que se trata de un proceso que va más allá del reconocimiento "cultural" del saber en juego, y a partir del cual los conceptos identificados pueden ser reutilizados por los alumnos en la resolución de nuevos problemas.

En forma general, es importante que en la clase se contemplen diferentes instancias:

- de presentación de las situaciones para su resolución individual y en pequeños grupos;
- de resolución efectiva por parte de los alumnos, en las que las intervenciones del docente se centren en aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo, evitando las correcciones parciales mientras los alumnos resuelven, ya que pueden ocasionar que las concepciones erradas no aparezcan para ser discutidas y explicitadas;
- de confrontación de resultados, procedimientos y argumentos empleados, en las que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado;
- de síntesis de los conocimientos a los que llegó el grupo, en las que el docente establece las relaciones entre el conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, pone nombres a las propiedades, en caso de que sean nuevas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con otros ya estudiados, o con nuevos a trabajar, es decir, comienza a institucionalizar los nuevos conocimientos.

También tiene que haber lugar para que los alumnos estabilicen y se familiaricen con los conceptos que se trabajaron, y con los que ya tuvieron una primera interacción, enfrentados a la resolución de otros problemas que conlleven una reutilización de conceptos y técnicas ya aprendidas.

Actividad 12 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Lea en el DC el punto *Las intervenciones del docente* y seleccione tres párrafos que puedan relacionarse con lo trabajado en la actividad anterior. Justifique su elección.

Actividad 13 (autocorrección)

Presentamos a continuación algunos problemas que completarían la secuencia que se inicia con el problema del rompecabezas de la Actividad 11. Sin avanzar en la lectura del análisis, indique qué criterios pueden haber orientado la elaboración de esta secuencia. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis.

Problema 2

¿Cómo transformarían las medidas de los lados de las figuras que forman un rompecabezas si la regla de transformación indica que el lado de 9 cm debe pasar a medir 7 cm? (sin tener el rompecabezas).

Problema 3

Se amplió un rompecabezas de modo tal que la longitud de cada lado de las figuras que lo componen aumentó en $\frac{1}{5}$ de su longitud original. Completar la siguiente tabla que indica la longitud original (X) y la longitud ampliada (Y).

X	12			8
Y		6	1	

Problema 4

a) Completar la siguiente tabla sabiendo que se trata de una situación de proporcionalidad directa.

X	4	3	$\frac{5}{3}$	
Y	$\frac{8}{3}$			12

b) ¿Qué instrucciones le daría a una computadora para que pueda calcular un valor de la tabla conociendo otro?

Análisis de la secuencia

El **problema 2** permite reinvertir lo trabajado en el problema 1 para el caso de una reducción, pero sin tener presente el rompecabezas. La elaboración de la tabla permitirá determinar la constante de proporcionalidad ($\frac{7}{9}$).

Es importante comparar los problemas 1 y 2 a fin de identificar que **cuando se trata de una ampliación la constante de proporcionalidad es mayor que 1, mientras que en una reducción la constante es menor que 1.**

Para resolver el **problema 3** es necesario discutir cómo hacer para que las medidas de los segmentos que forman las figuras aumenten $\frac{1}{5}$ respecto de la longitud original. Es probable que a los alumnos no les resulte evidente que en este caso la constante de proporcionalidad es $\frac{6}{5}$, y surge de considerar:

Longitud original + $\frac{1}{5}$ longitud original = $\frac{6}{5}$ longitud original.

En el **problema 4**, el **ítem a** permite reinvertir los conocimientos puestos en juego en los problemas anteriores. En este caso se trabaja en un contexto intramatemático, con una constante de proporcionalidad racional ($\frac{2}{3}$) que se obtiene a partir de un entero cuya imagen es un racional no entero. Además, requiere determinar la imagen correspondiente a un racional no entero.

El **ítem b** apunta a una generalización que podrá involucrar la escritura de una fórmula. En caso que se decida proponer la elaboración de fórmulas, sería importante considerar las dos posibles: *x* como variable independiente y *x* como variable dependiente.

Unidad 3

Enseñar a estudiar

Secuenciación de actividades: el tratamiento de la multiplicación y la división de fracciones

Si bien los números naturales son un apoyo para trabajar con los racionales, es necesario establecer sus diferencias debido a que muchos procedimientos eficientes para el primer conjunto dejan de serlo para el segundo. Por lo tanto, es fundamental tener en cuenta cuáles son las rupturas inevitables que se producirán en el conocimiento de los alumnos para poder abordarlas en la enseñanza.

Con relación a las operaciones, algunas de ellas son:

• **Multiplicación**: en N, el resultado de la multiplicación es siempre mayor o igual que cada uno de los factores. En Q, esta propiedad deja de ser válida en general: si se multiplica un número por otro menor que 1, el resultado es menor que el primero; si se multiplica por 1 se obtiene el mismo número y si se multiplica por uno mayor que 1 el producto es mayor que el primero. Podemos decir que la propiedad anteriormente mencionada es válida bajo ciertas condiciones: sólo si se multiplica por un número mayor que 1.

• **Multiplicación como suma abreviada**: la multiplicación entre dos números naturales puede pensarse como la suma de varias veces un número. El producto entre dos números racionales no siempre se puede pensar como una suma abreviada. Por ejemplo, al multiplicar un número natural por uno racional, por ejemplo $4\times\frac{3}{5}$, es posible interpretarlo como la suma de 4 veces $\frac{3}{5}$, es decir $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$. En cambio, al multiplicar dos fracciones como $\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$, no es posible interpretarlo como una suma abreviada.

• **División**: en N, el resultado de la división es siempre menor o igual que el dividendo. En Q, un dividendo no necesariamente se achica luego de dividirlo. Si se divide por un número menor que 1 el resultado es mayor que el dividendo; queda igual si se divide por 1 y es menor que el dividendo si se divide por un número mayor que 1.

• **Algoritmos de cálculo**: los algoritmos dan una "lista de pasos a seguir" para encontrar el resultado de una operación. El problema que surge es que se ocultan las verdaderas operaciones que se están haciendo. Tanto el algoritmo de la suma como el de la resta refuerzan la hipótesis de los alumnos de que la fracción son dos números en lugar de uno debido a que se los trabaja por separado. Lo mismo ocurre al multiplicar y dividir. Por otra parte, ningún conocimiento vinculado al funcionamiento de los algoritmos de las mismas operaciones en N es posible de ser reinvertido.

No estamos diciendo que los algoritmos no deban ser enseñados. Por el contrario, pero deben ser acompañados por una reflexión sobre las operaciones y los procedimientos que permita a los alumnos tener control sobre los resultados. En el aprendizaje de las operaciones, los algoritmos deben ser un punto de llegada y no de partida. El recorrido permite llegar a utilizarlos entendiendo por qué se pueden usar y en qué se basan.

El cálculo mental es un insumo fundamental para desarrollar los algoritmos que permiten operar con números racionales.

Actividad 14 (para discutir en el encuentro presencial)

Presentamos a continuación una secuencia de problemas, un análisis de su resolución y de los criterios que orientaron su elaboración. Sin avanzar en la lectura del análisis, identifique los conocimientos de que deben disponer los alumnos para resolverla, las posibles dificultades que puedan tener y las intervenciones que realizaría en esos casos. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis.

Problema 1

Decida cuál de las siguientes fracciones pueden expresarse con denominador 8. En los casos en se pueda, escríbalas.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{25}{8}$ c) $\frac{7}{16}$ d) $\frac{28}{16}$ e) $\frac{27}{32}$ f) $\frac{40}{32}$

Problema 2

Proponga tres fracciones que no puedan escribirse con denominador 8 y tres que sí.

Problema 3

Decida si las siguientes fracciones pueden escribirse con denominador 4.

a) $\frac{8}{20}$ b) $\frac{35}{20}$ c) $\frac{404}{8}$ d) $\frac{15}{24}$

Problema 4

La siguiente resolución es correcta. Explique por qué.

$$
\begin{aligned}
5\frac{4}{9}-\frac{8}{3}+\frac{5}{6} &= \frac{49}{9}-8\times\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\\
&= \frac{49}{9}-8\times\frac{3}{9}+\frac{5}{6}\\
&= \frac{49}{9}-\frac{24}{9}+\frac{5}{6}\\
&= \frac{25}{9}+\frac{5}{6}\\
&= \frac{50}{18}+\frac{15}{18}\\
&= \frac{65}{18}
\end{aligned}
$$

Problema 5

Resuelva las siguientes operaciones de dos maneras diferentes.

a) $\frac{7}{2}+\frac{9}{4}-\frac{15}{8}$ b) $\frac{31}{5}+\frac{15}{10}-\frac{18}{15}$

c) $3\frac{5}{6}-2\frac{2}{3}+\frac{45}{9}$ d) $\frac{3}{7}\times 5$

Problema 6

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La fracción $\frac{75}{24}$ no puede expresarse con denominador 4.

b) Como el denominador de $\frac{87}{16}$ es múltiplo de 8, entonces la fracción seguro puede escribirse con denominador 8.

c) El doble de $\frac{8}{3}$ es $\frac{16}{6}$

d) La mitad de $\frac{16}{48}$ es $\frac{8}{24}$

e) $\frac{3}{4}+\frac{4}{10}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$

Análisis de la secuencia

El **problema 1** tiene por objetivo que los alumnos elaboren conjeturas acerca de cuándo es posible encontrar una fracción equivalente a una dada y cuándo no. En este caso, resulta interesante analizar que es insuficiente considerar si el denominador es un divisor o un múltiplo de 8, también depende de cuál sea el numerador. Por ejemplo, $\frac{27}{32}$ "parece" poder transformarse en octavos, porque $\frac{1}{32}$ es la cuarta parte de $\frac{1}{8}$, pero como 27 no es múltiplo de 4 no es posible: $\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$, entonces se necesita una cantidad entera de $\frac{4}{32}$ para armar octavos.

Es importante tener en cuenta que este problema no sólo pone en juego la equivalencia de fracciones; también apela a las explicaciones. En general, los alumnos no saben explicar, pero debemos admitir que no siempre se trabaja sobre problemas donde la explicación sea objeto de análisis. Se aprende a explicar, por lo tanto nosotros debemos hacernos cargo de enseñarlo. ¿Cómo? Por ejemplo, discutiendo sobre diferentes explicaciones propuestas por los alumnos para analizarlas en cuanto a su claridad y exhaustividad.

El **problema 2** posibilita la puesta en juego de las hipótesis que los alumnos elaboraron en el problema 1 y permite establecer varias cuestiones:

• todas las fracciones que tienen denominador 2 pueden escribirse con denominador 8, sin importar cuál sea el numerador. Como $\frac{1}{8}$ es la cuarta parte de $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, entonces si la fracción dada es $\frac{k}{2}$ (k es un número natural) puede reescribirse como $k\cdot\frac{1}{2}=k\cdot\frac{4}{8}=4k\cdot\frac{1}{8}=\frac{4k}{8}$. A partir de esta última igualdad es posible "leer"[5] que si se tiene una fracción de denominador 2 y se la quiere expresar con denominador 8 el numerador se cuadruplica, al igual que el denominador;

[5] La "lectura" a la que nos referimos no es lineal, sino que supone conocimientos. La simple lectura de una afirmación no permite ver allí relaciones, lo cual sólo es posible si se vincula lo escrito a conocimientos previamente adquiridos.

• todas las fracciones que tienen denominador 4 pueden escribirse con denominador 8, sin importar cuál sea el numerador. Como $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, entonces si la fracción dada es $\frac{n}{4}$ (n es un número natural) puede reescribirse $n\cdot\frac{1}{4}=n\cdot\frac{2}{8}=2n\cdot\frac{1}{8}=\frac{2n}{8}$.

Entonces, si se tiene una fracción de denominador 4 y se la quiere expresar con denominador 8 el numerador se duplica, al igual que el denominador;

• no todas las fracciones con denominador 16 pueden escribirse con denominador 8. $\frac{1}{16}$ es la mitad de $\frac{1}{8}$, entonces $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$. Se necesitan $\frac{2}{16}$ para armar $\frac{1}{8}$, lo que implica que si el numerador es impar, quedará $\frac{1}{16}$ después de armar octavos. Luego, sólo es posible expresar una fracción de denominador 16 con denominador 8 si el numerador es par;

• si el denominador de una fracción es múltiplo de 8, no siempre se puede expresar con denominador 8. Depende del numerador;

Es importante discutir si hay fracciones con denominadores impares que puedan expresarse con denominador 8.

Las conclusiones anteriores permiten pensar cuáles son las fracciones que pueden expresarse con denominador 4 y así responder al **problema 3**.

En este punto es posible generalizar las conclusiones para otros denominadores.

En el **problema 4**, el análisis de la resolución del cálculo permite ver una aplicación de la reescritura de una fracción en otra equivalente.

El **problema 5** necesita de las fracciones equivalentes para operar con fracciones. La suma o resta de fracciones sin usar algoritmos se basa en dos cuestiones:

• para poder sumar o restar fracciones es necesario expresarlas con el mismo denominador;

• la definición de fracción permite sumarlas y restarlas sin dificultad. Por ejemplo, $\frac{6}{4}+\frac{5}{4}$ puede pensarse como 6 veces $\frac{1}{4}$ más 5 veces $\frac{1}{4}$, o sea 11 veces $\frac{1}{4}$ ó $\frac{11}{4}$.

El **problema 6** permite sistematizar las relaciones puestas en juego y las conclusiones de los problemas anteriores. Algunas de las afirmaciones propuestas apelan a errores habituales que es necesario poner en discusión.

Las afirmaciones c) y d) tratan a la fracción como dos números separados, operando con ellos como con los naturales.

Una forma de analizar que $\frac{16}{6}$ no es el doble de $\frac{8}{3}$ consiste en ver que 2 veces $\frac{8}{3}$ no es $\frac{16}{6}$:

2 veces $\frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 16 \cdot \frac{1}{3} = 16 \cdot \frac{2}{6} = \frac{32}{6}$ y $\frac{32}{6}$ no es igual a $\frac{16}{6}$.

También es posible encontrar la mitad de $\frac{16}{6}$ y compararla con el número dado. Como $\frac{16}{6} = \frac{8}{6} + \frac{8}{6}$, resulta que $\frac{8}{6}$ es la mitad de $\frac{16}{6}$ (y no $\frac{8}{3}$) debido a que 2 veces $\frac{8}{6}$ es $\frac{16}{6}$.

Un razonamiento análogo permite concluir que la afirmación f) es falsa.

En cuanto al cálculo $\frac{3}{4} + \frac{4}{10} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, como $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ (porque $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$) entonces la suma no puede ser igual a $\frac{1}{2}$. No es necesario hacer el cálculo para tener la certeza de que no es correcto y el análisis propuesto implica una lectura global del cálculo, así como de los sumandos que intervienen.

Actividad 15 (autocorrección)

Presentamos a continuación una secuencia de problemas. Sin avanzar en la lectura del análisis, y luego de resolverla, identifique el trabajo matemático que involucra cada problema e indique cuáles pueden ser los criterios que orientaron la elaboración de la secuencia. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis y, de ser necesario, amplíe o reformule sus respuestas.

Problema 1

En un terreno rectangular se quiere construir una casa que va a ocupar $\frac{2}{7}$ del ancho del terreno y $\frac{2}{5}$ de su largo. Sin usar ningún algoritmo de cálculo, determine qué parte del área del terreno quedará libre.

Problema 2

a. En el mismo terreno, ¿dónde puede ubicarse una casa que ocupe la misma área que la del problema 1? ¿Hay una sola posibilidad? Las partes del ancho y del largo del terreno que puede ocupar, ¿son únicas?

b. Si se quiere que la casa tenga la mitad del ancho que tiene en el problema 1 pero manteniendo su área, ¿cuál debe ser su largo? ¿Y si se quiere que su largo sea la mitad sin cambiar el área?

c. Si un lado de la casa ocupa $\frac{2}{3}$ del ancho del terreno, ¿qué parte del largo del terreno ocupará el otro lado si no se cambia el área respecto del problema 1?

Problema 3

Betty dice que cada vez que se multiplica una fracción por otra con numerador 1, el resultado es más chico que la fracción original. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

Problema 4

En cada caso, completar los espacios en blanco para que se cumpla la condición dada.

a. $\frac{1}{5} \times ..... = 1$ b. $\frac{1}{8} \times ..... = 1$ c. $\frac{2}{7} \times ..... = 2$

d. $\frac{2}{5} \times ..... = 1$ e. $\frac{3}{4} \times ..... < \frac{3}{4}$ f. $\frac{3}{4} \times ..... > \frac{3}{4}$

Problema 5

Dando razones, analizar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

$$\frac{m}{3} \times 4 = m \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{m}{3} \times 4 = m \times \frac{1}{3} \times 4$$

$$\frac{m \times 2}{7} = \frac{m}{7} \times \frac{2}{7}$$

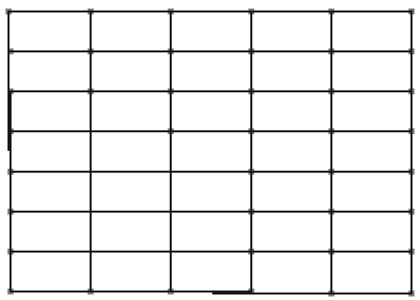
$$\frac{m}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{m}{3}$$

$$\frac{m \times 8}{5} = \frac{m}{5} \times 8$$

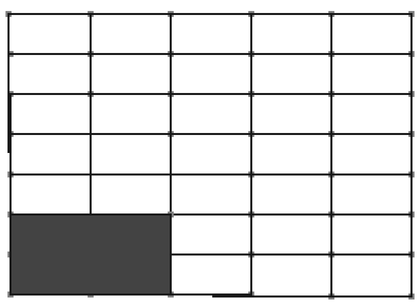
Análisis de la secuencia

En el **problema 1**, al no permitir el uso del algoritmo para multiplicar fracciones, resulta necesario encontrar una manera alternativa de delimitar la parte del terreno que quedará libre.

Si el ancho se divide en séptimos y el largo en quintos, el rectángulo queda dividido en 35 partes iguales, cada una de las cuales tiene $\frac{1}{35}$ del área total.



Si se toma la parte formada por $\frac{2}{7}$ del ancho del terreno y $\frac{2}{5}$ del largo, queda la siguiente zona rectangular:



El área sombreada está compuesta por 4 partes de $\frac{1}{35}$, o sea $\frac{4}{35}$ del área total. Pero el área de un rectángulo se calcula multiplicando el ancho y el largo, entonces: $\frac{2}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{35}$.

Un análisis de la igualdad anterior permite ver que los números obtenidos no son arbitrarios:

- el ancho se divide en 7 partes y el largo en 5, por lo cual el rectángulo queda dividido en $7\times5 = 35$ partes;
- se toman 2 partes del ancho y 2 del largo, o sea $2\times2 = 4$ partes en total;
- el resultado del producto es una fracción cuyo denominador es la cantidad total de partes (el producto de los denominadores de las fracciones que se multiplican) y el numerador es la cantidad de partes que se consideran (el producto de los numeradores de las fracciones que se multiplican);
- entonces, si b y d son números no nulos, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Finalmente, el problema pide la parte que queda libre, esto es $1-\frac{4}{35}=\frac{35}{35}-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$.

En el caso del **problema 2**, la pregunta a. aborda el hecho de que no hay un único rectángulo de un área dada. En cuanto a las preguntas b. y c., el objetivo del problema no es resolver una ecuación, sino utilizar los conocimientos referidos al producto de números naturales y de fracciones (elaborados en el problema anterior). Por ejemplo, si en un producto uno de los factores se reduce a la mitad, el otro debe duplicarse para mantener el resultado.

Así, si un lado de la casa ocupa $\frac{2}{3}$ del ancho del terreno, se busca el valor del otro lado de manera tal que al multiplicarlos dé un área de $\frac{4}{35}$. Teniendo en cuenta la definición de producto de fracciones desarrollada a propósito del problema 1, es posible plantear:

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{35}=\frac{2}{3}\times\frac{6}{35}=\frac{12}{105}=\frac{4}{35}$$

En este caso, no resulta simple encontrar gráficamente la fracción buscada, por lo cual es más apropiado trabajar en el marco aritmético.

El **problema 3** propone discutir sobre una concepción persistente en los alumnos. Al multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores. Como el numerador de la segunda fracción es 1, el numerador del resultado es igual al de la fracción original: $\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a\times1}{b\times c}$. Como b×c es mayor que b, porque es el resultado de multiplicar a b por un número natural, entonces:

$$\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a\times1}{b\times c}=\frac{a}{b\times c}<\frac{a}{b}$$

Esto último muestra que al multiplicar por una fracción de numerador 1 se obtiene un resultado menor que el factor. De aquí resulta un caso donde al multiplicar "se achica" el resultado.

Las dos primeras preguntas del **problema 4** pueden resolverse a partir de la definición de fracción: 5 veces $\frac{1}{5}$ es 1, y 8 veces $\frac{1}{8}$ es 1. En el caso c), $\frac{2}{7}=2\times\frac{1}{7}$ y como $\frac{1}{7}\times7=1$, $\frac{2}{7}\times7=2$.

Usando el mismo razonamiento que en c), $\frac{2}{5}\times 5 = 2$, para que el resultado sea 1 hay que dividir uno de los factores por 2, así $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2} = 1$.

Finalmente, el **problema 5** plantea una reutilización de lo elaborado hasta el momento.

Actividad 16 (para discutir en el encuentro presencial)

Luego de analizar la caracterización que realiza Butlen (1996) sobre una situación que tiene como objetivo construir una memoria escrita colectiva del trabajo del curso en una instancia de repaso, responda:

• ¿Qué diferencias puede establecer entre las intervenciones docentes propuestas y las instancias de institucionalización?

• ¿En qué sentido las intervenciones docentes descriptas contribuyen a utilizar las etapas del repaso para superar la mera descripción de las acciones realizadas?

• ¿Cómo puede vincular estas situaciones con la "necesidad de otorgar tiempo a los aprendizajes?

• ¿Qué pueden aportan estas situaciones a los alumnos? ¿Y a los docentes?

Elaboración de una memoria escrita

Durante cada semana se encarga a dos alumnos, en forma rotativa, redactar la "memoria del curso", que consiste en un resumen de cinco a diez líneas acerca de lo que aprendieron durante la semana en matemática. El texto es sometido a la crítica del curso, que lo puede enmendar y precisar. Durante el debate colectivo, la palabra se cede prioritariamente a los alumnos encargados de la redacción.
El docente se limita a valorar la producción de los alumnos, pero también a pedir participación al resto del curso para enriquecerla. Este manejo debe ser flexible. El docente pide la participación de los alumnos, hace notar los eventuales errores matemáticos y proporciona los medios para corregirlos colectivamente, pero son los alumnos quienes colectivamente definen las nociones que hay que conservar y las correcciones a efectuar.
En los casos de "bloqueo", el docente no debe dar la palabra a los "buenos" alumnos. Puede apoyarse, para alimentar el debate, en alumnos de nivel medio o bajo, susceptibles de tomar fácilmente la palabra y hacer propuestas constructivas, incluso contradictorias.

Cuando sea necesario, el docente se ocupará de la recapitulación de ciertas formulaciones sin realizar ninguna intervención que apunte al sentido, al contenido o a la naturaleza de las propuestas. Es decir, coordina el debate pero no toma partido.
Es importante tener en cuenta que el texto final es el redactado por los alumnos.

Butlen señala, además, que la situación descripta tiene una triple finalidad: *de diagnóstico, de aprendizaje y de regularización.*

Diagnóstico

El docente puede saber qué retienen los alumnos de las actividades matemáticas hechas en clase, lo que es importante para ellos, y puede así identificar algunas concepciones. La regularidad de estas sesiones permite construir la historia de la apropiación de las nociones enseñadas: así puede ser posible recoger indicios sobre el nivel de disponibilidad de estos conocimientos en los alumnos.

Aprendizaje

Estas sesiones ayudan a:
- La despersonalización del saber a partir de la redacción colectiva.
- La descontextualización del saber, pues suscitan una formulación tendiente a excluir todo ejemplo particular sin carácter genérico.
- La construcción y apropiación de nociones y métodos estudiados.
- El uso ulterior de estas nuevas nociones.

Regulación

El docente puede utilizar esta memoria escrita colectiva para orientar su trabajo, volver sobre ciertas nociones o ciertos episodios y enriquecer su enseñanza. Gracias al ida y vuelta sobre las situaciones de aprendizaje, sus condiciones, exigencias y objetivos se puede ayudar a los alumnos a identificar la importancia de lo que fue aprendido, su utilización posible en otros problemas, en otros ámbitos y también a poder realizar anticipaciones referidas a los aprendizajes a los que apunta la situación

Comentarios acerca de la actividad

En primer lugar, es de interés aclarar que las memorias no están ni bien ni mal, que pueden incluir dudas y preguntas. También es importante tener en cuenta que la memoria debe incluir aspectos relevantes y no cuestiones anecdóticas, que es algo que se escribe en tiempo pasado y no un registro de la clase.

A medida que se vaya avanzando en la elaboración de memorias, las formulaciones de los alumnos deben ser cada vez más descontextualizadas y menos vinculadas a las acciones.

Con relación a lo solicitado en la actividad anterior, consideramos necesario resaltar:

• *Diferencia con las instancias de institucionalización*: el docente pide la participación de los alumnos y son ellos, colectivamente, quienes definen las nociones que hay que conservar y las correcciones a efectuar. El texto final es el de los alumnos, no la síntesis del profesor. Por supuesto, el docente tiene que hacer notar los eventuales errores matemáticos y proporcionar los medios para corregirlos colectivamente.

• *Características de las intervenciones docentes*: la "neutralidad aparente" es lo que permite que sean los alumnos los que tengan que hacerse cargo de las formulaciones y argumentaciones. ¿Qué sentido tendría pedirles la elaboración de la memoria si es el docente el que convalida lo que debe contener o no? Lo importante es reconocer e identificar la gestión del maestro como condición necesaria para lograr que los alumnos puedan pasar de la descripción del "¿qué hice?" a la descripción del "¿qué aprendí?".

• *Vinculación con la necesidad de "otorgar tiempo a los aprendizajes"*: la triple finalidad (diagnóstico, aprendizaje y regularización) favorece la toma de conciencia de que la construcción de un conocimiento con sentido requiere tener en cuenta las instancias señaladas, aunque no se utilice la situación descripta. Esto implica renunciar a la ilusión del "tema dado".

A modo de ejemplo, en el Anexo 2 presentamos tres memorias elaboradas por alumnos de 8° año de una escuela de la provincia de Buenos Aires, referidas a una clase en la que se trabajaron los problemas 1 y 2 de la secuencia anterior.

Es importante notar que en este curso la estrategia de elaboración de memorias se implementa habitualmente, lo que explica la formulación de las mismas.

Actividad 17 (para la evaluación de proceso)[6]

A partir de la secuencia para trabajar división de fracciones que se presenta a continuación, le pedimos que la lleve al aula y le solicite a sus alumnos que elaboren la memoria de lo trabajado. Posteriormente, elabore un informe que incluya los siguientes apartados:

[6] Es conveniente que esta actividad se realice en grupos (de hasta tres integrantes). Un profesor se hará cargo de gestionar la clase y el resto elaborará los registros correspondientes.

Primera Parte

• Características de la institución y del grupo de alumnos.

Con relación a la puesta en aula de la secuencia:

• contenidos que se proponía desarrollar y contenidos que efectivamente se desarrollaron;

• comentarios acerca de alguna producción oral o escrita de los alumnos que denote dificultades relacionadas con los contenidos disciplinares e intervenciones docentes realizadas en relación con las mismas;

• algunas intervenciones o producciones de los alumnos que le hayan parecido adecuadas y las haya podido utilizar como punto de apoyo para realizar una reflexión conjunta, incluyendo la reflexión realizada;

• institucionalizaciones realizadas.

Con relación a la clase de repaso en la que se utilizó la memoria:

• la memoria elaborada por los alumnos;

• algunas intervenciones de los alumnos que haya podido utilizar para avanzar en la elaboración de la memoria, explicitando cómo lo hizo y por qué.

Segunda parte

• Análisis crítico de las actividades propuestas y de la gestión de las clases, incluyendo la de repaso, fundamentado en los marcos teóricos abordados.

• Modificaciones que realizaría a su propuesta y a sus intervenciones y justificaciones.

Secuencia

Problema 1

Al resolver divisiones con la calculadora, Lautaro encontró los siguientes resultados: $6 \div \frac{1}{2} = 12$ $\quad 8 \div \frac{1}{2} = 16$ $\quad \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$. Le pareció extraño que el resultado le diera mayor que el dividendo y más aún que sea el doble del dividendo. Se preguntó si sería posible que al dividir por $\frac{1}{2}$ hubiera que multiplicar por 2. Sin embargo, estaba seguro de que los resultados eran correctos.

Sin usar ningún algoritmo, explicar por qué sucede lo anterior.

Problema 2

Para resolver $\frac{9}{4} \div \frac{1}{2}$, Ramiro hizo lo siguiente: $\frac{1}{2} \times ..... = \frac{9}{4}$. Entonces, $\frac{9}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$. Su respuesta era correcta. ¿Puede explicar cómo resolvió el problema?

Problema 3

¿Por qué número hay que multiplicar a $3\frac{1}{2}$ para obtener $1\frac{3}{8}$ como resultado?

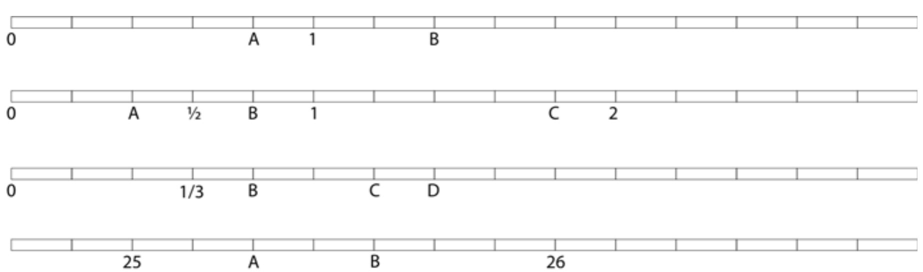
Secuenciación de actividades: el tratamiento de la recta numérica, el orden y la densidad

Actividad 18 (autocorrección)

Lea el problema que se presenta a continuación y su respectivo análisis. Posteriormente, identifique algunas dificultades que puedan tener los alumnos al resolverlo.

Problema

¿Qué número representan las letras ubicadas en cada recta numérica?



Comentarios acerca de la actividad

El manejo de la representación de las fracciones a través de la recta numérica debe permitir al alumno la conceptualización de las relaciones que ha venido trabajando en diferentes contextos y en diferentes registros de representación: gráficos, numéricos, etc.[7]

A partir de problemas de este tipo podemos apreciar cómo la representación gráfica puede dar lugar a la reflexión sobre la naturaleza de los números con los que estamos trabajando.

En la **primera** recta la unidad está representada, y además la recta está dividida, en partes iguales, por lo que resulta bastante simple decidir cuáles son los números que corresponden a los puntos designados como A y B.

En la **segunda** recta, aunque la unidad aparece marcada, no está dividida en partes iguales, lo que hace que este problema aparezca como más complejo respecto del anterior. En este caso, para decidir qué número representa el punto A habrá que pensar que la tercera parte de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{6}$ y que en consecuencia, A representa $\frac{2}{6}$.

Para determinar la ubicación del punto B, si bien la recta no está dividida en cuartos, al observar que se encuentra en el punto medio entre $\frac{1}{2}$ y 1, se podrá afirmar que representa el punto $\frac{3}{4}$.

En la **tercera**, en tanto, se observa que las partes en que está dividida corresponden a la tercera parte de un tercio, es decir $\frac{1}{9}$, con lo cual B está ubicado en los $\frac{4}{9}$. Para decidir la ubicación de C y D bastará con contar novenos.

En la **cuarta**, por último, habrá que determinar que la distancia entre 25 y A corresponde a un tercio de la unidad y que la región sombreada es $\frac{1}{12}$ de la unidad. Si 25 enteros son $\frac{75}{3}$, entonces A representa el punto $\frac{76}{3}$ y B, $\frac{306}{12}$.

Para enriquecer este trabajo puede pedirse a los alumnos que sean ellos los que representen números sobre la recta a partir de una información dada. Por ejemplo, dar una recta donde estén ubicados el $\frac{1}{3}$ y el $\frac{5}{6}$ y pedirles que ubiquen el cero y el dos.

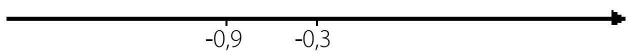
[7] En matemática se utilizan numerosos registros de expresión y representación para un mismo objeto matemático: registro del lenguaje oral, gráfico, figurativo (incluye dibujos), tabla, de escritura para los números, etc. Se puede realizar un cambio de registro sin cambiar lo representado. A lo largo de la escolaridad el sujeto tendrá que disponer no de uno, sino de varios registros de representación, ya que se puede diferenciar un objeto de su representación si se dispone al menos de otra representación en otro registro.

Actividad 19 (correspondiente a la evaluación de proceso)

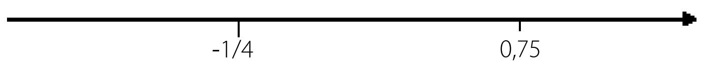
Describa la actividad matemática que permite desplegar la siguiente secuencia y vincúlela con aquellos puntos del Diseño Curricular que crea convenientes.

1) Represente en una misma recta numérica los siguientes números:
a) -1/6; -1 y 7/3
b) -1,3; -0,2 y 2/5

2) Ubique el 0 y el 1 en cada una de las siguientes rectas numéricas:
a)



b)



3)
a) Ubique cada uno de los siguientes números entre los décimos más cercanos:
1/2 7/6 -1/2 -7/6

b) Ubique cada uno de los números del ítem a) entre los centésimos y milésimos más cercanos.

Al referirse a las actividades de evocación como una de las maneras de reflexionar sobre lo hecho, Napp, Novembre, Sadovsky y Sessa (2000) señalan:

> Evocar un problema es evocar las acciones sin realizarlas. Intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, los alumnos son llevados a repensar el problema y los procedimientos de resolución utilizados. Esta actividad tiene una significación diferente a la de resolver: los alumnos tienen que pensar en el sentido del problema, más que en los detalles de su resolución. El proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere sólo para "hacer". Los alumnos deben describir los problemas resueltos –indicando su enunciado, explicándolo, diciendo cuáles eran los datos y cuál la pregunta– pero además deben relatar los distintos procedimientos de resolución utilizados en clase. Para garantizar que todos los alumnos participen del momento de evocación, el docente puede solicitarles que la preparen, o sea que comiencen con este trabajo de recuperación antes de la clase.

Actividad 20 (para discutir en el encuentro presencial)

Imagine que ha trabajado con sus alumnos la secuencia anterior y que luego quiere plantear un trabajo de evocación, ¿cómo les daría la consigna?
A continuación, anticipe el contenido de la "evocación ideal", es decir, lo que usted piensa que no puede obviarse al recrear el trabajo hecho.

En relación con esta actividad, es importante que los docentes piensen e intercambien sobre cómo dar la consigna para hacer una evocación, debido a que no es una tarea simple. Una evocación no sólo se refiere a una lista de contenidos, también puede incluir procedimientos, mención a errores discutidos en clase, dificultades que se plantearon, etc. Esto también tiene que especificarse en la consigna.

En cuanto a la "evocación ideal", los docentes no pueden gestionarla si no anticipan cuáles son las cuestiones que necesitan incluir. Si esto no sucede, es decir, si los alumnos encargados de hacerla no incluyeron estas cuestiones, ni tampoco surgen a partir del intercambio con los demás alumnos, entonces el docente tendrá que proponer alguna actividad que ponga en juego el aspecto que no se ha tenido en cuenta. A partir de allí, tendrá que hacer luego una sistematización de lo trabajado.

Actividad 21 (autocorrección)

Presentamos a continuación una secuencia para abordar la noción de densidad de los números racionales. Sin avanzar en la lectura del análisis, identifique los posibles procedimientos de resolución de los alumnos y las dificultades que pueden surgir. Posteriormente, compare su resolución con el análisis.

Problema 1

Estos números se encuentran entre 0 y 3, ubicarlos en la columna que corresponda.

3/7 8/3 4/5 21/35 1 5/7 9/5 17/7 14/5 11/9

Entre 0 y 1	Entre 1 y 2	Entre 2 y 3

Problema 2

¿Entre qué números enteros se ubican las siguientes fracciones?

11/4 28/3 33/7 84/9 9/5 85/12 125/10

Problema 3

Encontrar, si es posible, las fracciones que se detallan a continuación; si no fuera posible explicar por qué.

- Una fracción con denominador 3 entre 0 y 1
- Una fracción con denominador 5 entre 4 y 5
- Una fracción con numerador 1 entre 0 y 1
- Una fracción con numerador 2 entre 1 y 2
- Una fracción con numerador 2 entre 3 y 4

Problema 4

La siguiente lista de fracciones está ordenada de menor a mayor. ¿Dónde se ubicaría el 1/2? ¿Y el 1 5/7?

2/5 4/7 5/4 12/8 15/8 19/7

Problema 5

Intercalar una fracción entre cada par de números.

3/5	6/5
1/2	3/4
5/12	6/12
4/5	1

Análisis de la secuencia

En los **problemas 1** y **2** es esperable que las fracciones se descompongan como la suma de fracciones equivalentes a números enteros más la fracción restante. Por ejemplo, pensemos en el 11/4: este número puede ser pensado como 4/4+4/4+3/4, es decir 2+3/4; lo que permite asegurar que 11/4 está entre 2 y 3.

El análisis de esta estrategia permite llevar a establecer un procedimiento más económico. Por ejemplo, preguntarse para el 11/4: "¿Cuántas veces entra 4 en 11?". Esto permitirá responder que entra 2 veces enteras, para lo cual usamos 8 de los 11 cuartos en cuestión, faltando aún 3. O sea que podemos pensarlo como 8/4+3/4.

El **problema 3** supondrá "esperar" a los alumnos, "dar tiempo". Es muy probable que necesiten probar, intentar, discutir. En el primer caso, cuando busquen fracciones con denominador 3, probablemente ensayen: 1/3, 2/3, 3/3, 4/3… y esperamos que se detengan en observar que no será necesario seguir a partir de 3/3, es decir 1; y entonces advertir que 1/3 y 2/3 son las únicas fracciones con denominador 3 menores que 1, por lo tanto las demás son mayores que 1. El problema permite a los alumnos obtener una conclusión referida a un conjunto infinito (de todas las fracciones con denominador 3, las únicas que están entre 0 y 1 son 1/3 y 2/3), y tal es la riqueza que brinda este problema, la de producir un argumento que permita "asegurar", sin probar caso por caso.

Para hallar fracciones entre 4 y 5 con denominador 5 es esperable que se expresen el 4 y el 5 como fracciones con denominador 5; y así obtener el 20/5 equivalente a 4 y 25/5 equivalente a 5. Sabemos que no es un problema de respuesta inmediata (por eso justamente consideramos que es un problema valioso) y entendemos que será necesario prever un tiempo de exploración.

En el caso siguiente es imposible encontrar fracciones con numerador 2 entre 3 y 4, puesto que 2/2 es equivalente a 1, y a medida que se agrandan los denominadores la fracción se aleja cada vez más del 1, achicándose. Nuevamente, la intención de este problema es la de producir un argumento que asegure una conclusión sobre un conjunto infinito, sin detenerse en la exploración de cada caso. Lo mismo para el último caso.

En el **problema 4** se espera que se proponga como una estrategia comparar 1/2 con cada una de las fracciones que se presentan; así 2/5 es menor que 1/2, ya que 1 entero es equivalente a 5/5, y la mitad de 5/5 será 2/5 más medio quinto más, o sea 2/5+1/2 x 1/5, o sea 2/5+1/10. Con la fracción 4/7 se seguirá un trabajo análogo, se pensará en la mitad del entero, es decir de 7/7, o sea 3/7+1/14. Por lo tanto, 1/2 se encontrará entre 2/5 y 4/7.

En el **problema 5** es probable que no exista dificultad para intercalar fracciones entre 3/5 y 6/5, pero a la hora de hacerlo entre 1/2 y 3/4 será necesario buscar fracciones equivalentes que permitan la interpolación de fracciones. En un primer intento, no es de extrañar que los alumnos al pensar 1/2 como equivalente a 2/4 consideren que el problema no tiene solución; es allí donde se recomienda que el docente plantee la necesidad de seguir trabajando con las equivalencias, pensando en encontrar la relación entre 5/8 y las fracciones dadas.

Es aquí donde entra en juego la noción de densidad, en tanto que se advierte que siempre se pueden intercalar fracciones entre dos dadas. Y si bien el concepto de densidad es una noción difícil y de elaboración lenta, será interesante proponer el análisis de la diferencia entre la situación que se plantea en el problema 3 y en el problema 5: entre dos fracciones dadas existen infinitas fracciones (lo que se plantea en el problema 5), pero si se impone alguna otra condición (como ocurre en el problema 3), puede ser que haya una cantidad finita de fracciones, o bien ninguna. Del mismo modo, el contexto también tiene incidencia en este aspecto de los números racionales. Si nos preguntamos cuántos precios posibles hay entre $2,10 y $2,20 la respuesta es 10, ya que en nuestro sistema monetario sólo existen décimos y centésimos. En cambio, si nos preguntamos cuántos números hay entre 2,10 y 2,20 la respuesta es infinitos.

Nos proponemos continuar con un trabajo tendiente a considerar a los números racionales como objeto de estudio y, dentro de este encuadre, la propiedad que posee este conjunto numérico: la densidad.

Actividad 22 (para discutir en el encuentro presencial)

Lea la secuencia que se presenta a continuación y responda las siguientes preguntas. Posteriormente, complemente sus conclusiones con el respectivo análisis.

- En la primera parte, ¿cuáles podrán ser las estrategias que usen sus alumnos para descubrir el intervalo?
- Una de las utilidades del encuadramiento de fracciones por intervalos de longitud es que permite comparar fracciones. Así, si 15/4 está entre 3 y 4, y 1370/271 está entre 5 y 6, es claro que 15/4 < 1370/271. ¿Qué otras funciones puede cumplir dicho encuadramiento?
- En la segunda parte, ¿cuál cree que es la finalidad de limitar la cantidad de preguntas? (Pensarlo a partir de las posibles estrategias para encontrar el intervalo. En particular, si se empieza considerando los números del 0 al 10, y se va partiendo siempre por la mitad, ¿está entre 0 y 5?), ¿está entre 0 y 3?, ¿está entre 2 y 3?
- En la tercera, ¿qué papel juega el concepto de inclusión de los números enteros en el conjunto de números racionales?
- En la cuarta, ¿qué dificultades cree que encontrarán los alumnos?

Organización de la clase: se divide a la clase en grupos de 4 alumnos cada uno. En cada grupo juegan dos contra dos. Los alumnos dispondrán de papel y birome.

1º Parte: la consigna es la misma para todos los grupos. Una de las parejas elige un número fraccionario entre 0 y 10 y lo anota en un papel sin que la otra pareja lo vea. La otra pareja deberá adivinar en qué intervalo de números naturales consecutivos se encuentra dicha fracción. Para ello podrá ir arriesgando intervalos que serán respondidos por sí o por no, y luego intentar hacerlos cada vez más pequeños. Por ejemplo, si la pareja B pensó en la fracción 15/4, la pareja A podrá interrogar:

- ¿Está entre 5 y 10? Resp: no
- ¿Está entre 1 y 3? Resp: no
- ¿Está entre 0 y 1? Resp: no
- ¿Está entre 3 y 5? Resp: sí
- ¿Está entre 4 y 5? Resp: no
- ¿Está entre 3 y 4? Resp: sí

La pareja A determinó un intervalo de longitud 1 (entre 3 y 4) dentro del cual se halla la fracción que pensó la pareja B. Para ello hizo 6 preguntas.

Esta parte se debe realizar varias veces, alternando la pareja que elige la fracción y la pareja que intenta encuadrarla.

2º Parte: se les plantea a los alumnos la misma consigna (una pareja piensa la fracción y la anota en un papel, la otra intenta descubrir el intervalo), pero agregando la restricción de poder realizar únicamente hasta 4 preguntas.

3º Parte: el trabajo se realiza por grupos de 4 alumnos y la consigna es: de los intervalos que encontraron durante el juego vamos a elegir uno, por ejemplo el [3,4], y cada grupo debe encontrar otras fracciones que estén en ese mismo intervalo.

4º Parte: la consigna es igual que en la 1º parte, pero con el siguiente agregado: deberán encuadrar la fracción en un intervalo más chico que el de longitud 1.

5º Parte: una vez que los alumnos realizaron varias veces la parte anterior se realizará una puesta en común coordinada por el docente con la finalidad de que expongan las dificultades encontradas y puedan establecer entre ellos algunas convenciones que faciliten la tarea (Brousseau, 1993).

Análisis de la secuencia

En la **1° parte** se busca que los alumnos puedan desplegar distintas estrategias para llegar a descubrir el intervalo de longitud 1 en el que se encuentra la fracción. Al mismo tiempo, la pareja que eligió la fracción deberá controlar constantemente la relación entre la fracción y los intervalos por los cuales es interrogada.

Al finalizar la **2º parte** es posible introducir la notación de intervalo como una convención matemática a ser respetada por todo el curso. Por ejemplo, si se pregunta "¿Está entre 0 y 5?", se puede escribir [0,5] asumiendo que la fracción 15/3 = 5 está en el intervalo.

En la **3° parte** es muy importante preguntar a los alumnos "¿Que fracción o fracciones equivalen al número 3? ¿Y al número 4?". El objetivo es que los alumnos reconozcan la posibilidad de pensar al 3 = 15/5 = 12/4 = 21/7 = 30/10, etc.

Para el desarrollo de la **4° parte** puede retomarse el ejemplo de la 1º parte. La pareja B pensó en la fracción 15/4, la pareja A pregunta:

Pareja A	Pareja B
¿En [0,5]?	sí
¿En [0,2]?	no
¿En [3,4]?	sí
¿En [15/5,17/5]?	no
¿En [17/5,19/5]?	sí

Una dificultad que puede presentarse está vinculada a la necesidad que tiene la pareja que eligió la fracción para determinar si el intervalo por el cual se interroga contiene o no a dicha fracción. Esta tarea requerirá de la intervención del docente:

- conviene usar fracciones con el mismo denominador;
- es preferible considerar fracciones de denominador 10 ó 100;
- recordar criterios de comparación de fracciones.

En la secuencia presentada se han considerado los intervalos sin los bordes; para otros problemas será decisión del docente adoptar intervalos que incluyan los bordes o no. Seguramente, a partir de la respuesta al ítem b) surgirá "el problema del tiempo". Es verdad que esta forma de trabajo exige más tiempo que el desarrollo de los temas que habitualmente se realiza en las aulas.

Actividad 23 (autocorrección)

Una vez trabajada la secuencia anterior, analice cuál podría ser la finalidad de proponer a sus alumnos la siguiente actividad y cómo la gestionaría en el aula. Posteriormente, avance con la lectura del módulo y vuelva sobre sus respuestas.

Discutir la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:
1- entre dos números enteros hay siempre un número racional;
2- entre dos números racionales hay siempre un número fraccionario;
3- entre dos números racionales hay siempre un número entero.

Análisis de la actividad

La afirmación 1 no presenta mayores dificultades. Si bien la 3 es falsa, en su primera respuesta los alumnos pueden llegar a decir que es verdadera. Acá el docente puede proponer un contraejemplo o sugerir la utilidad de la recta numérica como recurso. Podrá también comparar la afirmación con la que dice: "Dado un número entero siempre se pueden encontrar dos fracciones, una mayor y otra menor, entre las que está el entero".

El debate acerca del contraste entre estas dos expresiones ayuda a la comprensión de que si se considera un intervalo que contiene un entero podemos asegurar que en ese intervalo hay fracciones, pero que en un intervalo donde sus extremos son fracciones, no es seguro que haya un entero.

A partir del debate, el docente podría entonces dejar institucionalizado que entre dos racionales siempre existe otro racional. Esta propiedad se conoce como densidad del conjunto de números racionales.

Es importante dedicar un momento a analizar el enunciado de esta propiedad, porque cuando se afirma que entre dos números racionales siempre existe otro racional se están diciendo dos cosas:

• "Entre dos números racionales" se refiere a dos números racionales cualesquiera, es decir que esto sucede *para todos* los racionales y no con dos en particular. La generalidad de la propiedad no necesariamente se desprende de su lectura;

• "Existe otro racional" no se refiere a que hay un número entre ellos, sino a que hay infinitos.

En realidad, la propiedad debería leerse como que "existe al menos un racional" y como esto se puede hacer para cualquier intervalo contenido entre los racionales dados, resulta que "entre dos números racionales cualesquiera siempre hay infinitos números racionales".

Creemos que el enunciado de las propiedades muchas veces está hecho en un lenguaje que presupone una generalidad que los alumnos no están preparados para interpretar. Por eso es importante que los docentes no naturalicen la lectura y que tomen al enunciado de la propiedad como un objeto de reflexión.

Actividad 24 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Vuelva nuevamente sobre la actividad 2 de la Unidad 1 y, de ser necesario, reformúlela. Justifique en cualquier caso.

Unidad 4

El tratamiento del error

Si bien aprender a partir de los propios errores es tan antiguo como el hombre, su rol constructivo en los aprendizajes escolares es un aporte reciente. En las prácticas pedagógico-didácticas tradicionales los errores se evitaban, y cuando no era posible hacerlo se sancionaban. En ese sentido, se consideraba que los buenos alumnos eran los que no cometían errores y los buenos docentes los que, a partir de sus explicaciones, lograban que los alumnos no los cometieran.

Tal era así que en el pizarrón sólo se escribía lo que estaba bien y si surgía algún error rápidamente se borraba, reemplazándolo por la resolución correcta. "El error no se escribe porque sino se fija", decían los viejos manuales de Didáctica. Hoy en día, el error ha cobrado una nueva consideración en el marco del enfoque didáctico: no sólo es considerado normal sino necesario para el aprendizaje, por lo que debe estar integrado al mismo. Como indica Guy Brousseau (1980):

> El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

Se trata, entonces, de correr una mirada que sólo apunta a *resultados exitosos*, para centrarla en los procesos que favorecen los aprendizajes de los alumnos.

Las producciones de los alumnos permiten registrar gran variedad de errores. Según por qué se hayan originado, algunos de ellos no merecen una atención especial, pero otros pueden obedecer a causas de real significación.

En los siguientes apartados reflexionaremos en torno a algunos errores habituales que consideramos relevantes.

Diferentes orígenes de los errores

Actividad 25 (autocorrección)

Presentamos a continuación el relato de una situación y su análisis. Sin avanzar en la lectura del módulo, analice la pertinencia de las intervenciones del docente e indique a qué puede atribuirse el error del alumno. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis y, de ser necesario, amplíe o reformule sus respuestas.

Se propone a los alumnos el siguiente problema:
Completar la etiqueta:

EL BUEN QUESO
Precio por kilo: 84,60 pesos
Peso del paquete: 0,750 kg Precio a pagar:

Uno de los alumnos del curso, Gerard, plantea la siguiente operación:

$$84{,}69 \quad \underline{|\ 0{,}750 \qquad\qquad}$$

y luego no sabe cómo seguir. El docente se acerca y dialoga con el alumno.

Docente: ¿Y, Gerard?

Gerard: Y... creo que es así... pero no sé cómo se hace.

Docente: ¿Estás seguro de que encontraste la operación correcta?

Gerard: ¿No es así? ¿No es una división?

Docente: Vamos a pensar juntos. Escúchame, ¿cuál es el precio de 1 kilo de queso?

Gerard: 84 con 60 pesos.

Docente: Bueno, ahora no mires más tu hoja. Escúchame con atención. Si compraras 2 kilos de queso, ¿qué tipo de operación realizarías?

Gerard: 84 con 60 por 2.

Docente: ¿Y si compraras 5 kilos?

Gerard: 84 con 60 por 5.

Docente: Entonces, ¿cuál es la operación para 2 kg y 5 kg?

Gerard: Una multiplicación, señor.

Docente: Entonces calcula...

Gerard: 84 con 60 por 0 coma 750.

Docente: Muy bien, has entendido. Ves, si piensas detenidamente puedes resolverlo (Charnay, 1996).

Análisis del relato

Como describe el autor, en líneas generales podemos observar que el docente escucha al alumno, que trata de ayudarlo para que encuentre la respuesta correcta y que lo incita a participar, en lugar de decirle simplemente que no está bien o darle la respuesta correcta. Sin embargo, lo que interesa plantear es que es posible llegar más lejos, tratando de encontrar respuestas a preguntas como: ¿Por qué el alumno no puede reconocer el cálculo correcto que debe efectuar? ¿Cuál es el elemento que en su intercambio con el docente lo condujo a encontrarlo?

Desde la perspectiva de la relación entre el alumno y el saber matemático, es necesario tener en cuenta que la respuesta de Gerard no revela ausencia de conocimiento sino una *forma de conocer ligada a lo que ya sabe*. Podría analizarse el funcionamiento de este alumno respecto de la multiplicación de la siguiente manera: si bien Gerard responde de manera incorrecta a la primera pregunta, lo hace correctamente cuando el docente le pregunta acerca del precio de 2 ó de 5 kilos de queso. Evidentemente, para este alumno, que desde hace unos años está trabajando multiplicaciones con números enteros, la multiplicación es otra manera de expresar la suma reiterada de un mismo número. Esto hace que cuando le preguntan por el costo de 0,75 kilos de queso a 84,60 el kilo no reconozca la multiplicación pues 84,60 no se repite ni una sola vez.

Por otra parte, si se enfoca el análisis en la relación entre el alumno y la actividad matemática, podría observarse que si bien Gerard no determina la operación "correcta" propone una operación que le permite dar una repuesta al problema. Esto evidencia que para él resolver un problema no es buscar, probar, equivocarse, sino encontrar alguna operación que le permita dar una repuesta. Así, en principio propone una operación que no es adecuada y luego, incentivado por el docente, encuentra la respuesta esperada por este último. Es decir, esta dificultad puede atribuirse a que el significado que él le otorga a "resolver un problema" es "encontrar una operación". Errores como éste dan cuenta de *las interpretaciones que hacen los alumnos de sus tareas*.

Una posible explicación para este fenómeno tan frecuente es la siguiente: en las clases habituales de resolución de problemas el docente sólo propone problemas cuyo enunciado contiene todos los datos útiles para resolverlos y, al mismo tiempo, el tipo de procedimiento que es reconocido como valioso es el algorítmico, lo que da lugar a interpretaciones similares a la realizada por Gerard.

Actividad 26 (para discutir en el encuentro presencial)

Presentamos a continuación algunos errores usuales de los alumnos al trabajar con números racionales. Sin avanzar en la lectura del análisis de sus posibles causas, indique cuál puede ser la "forma de conocer" que subyace a los mismos.
Posteriormente, confronte su resolución con el análisis.

a) 5,7 + 2,9= 7,16
b) 0,2 x 0,4 = 0,8
c) El siguiente de 0,16 es 0,17
d) 2,370 > 2,37

Análisis de los errores propuestos

Las resoluciones de los **ítems a** y **b** dan cuenta de la utilización de una propiedad implícita (que funciona en algunos casos y no en otros): para operar (sumar o multiplicar) dos números racionales expresados en forma decimal sus partes enteras y sus partes decimales se suman en forma separada.

En el **ítem c** los alumnos parten de considerar que 0,16 y 0,17 son consecutivos y luego extienden sus conocimientos acerca de los números naturales: "Entre dos números consecutivos no hay ningún número racional". La densidad de los racionales produce una ruptura con lo que los alumnos saben acerca de los números naturales.

El **ítem d**, en tanto, es resuelto mediante la comparación de las partes enteras y las partes decimales en forma independiente.

Podemos observar que estos errores dan cuenta de un mismo modo de conocer: *en los números racionales expresados en forma decimal la parte entera y la parte decimal funcionan, para muchos alumnos, como números naturales independientes*.

Propuestas de remediación

Los errores ligados al modo de conocer de los alumnos, es decir, a las concepciones por ellos construidas, suelen estar profundamente arraigados. Esto hace que no puedan ser superados por medio de una charla o de una observación por parte del docente. Es necesario pensar en *dispositivos de remediación*. Y hablamos de *re-mediación* porque se trata de prácticas que implican nuevas mediaciones entre el alumno y el saber:

> Llamaremos remediación a todo acto de enseñanza cuyo objetivo es permitir que el alumno se apropie de los conocimientos (saber, saber hacer, saber ser, competencias metodológicas) después que una primera enseñanza no le ha permitido hacerlo en la forma esperada (Charnay, 1991).

Actividad 27 (autocorrección)

Presentamos a continuación la descripción de una situación que resulta adecuada para trabajar en una instancia de remediación de errores vinculados a la noción de densidad. Sin avanzar con la lectura del análisis, identifique los aspectos que permite trabajar y las reflexiones que pueden promoverse. Posteriormente, confronte su resolución con el análisis y, de ser necesario, amplíe o reformule sus respuestas.

Juego de averiguar un número decimal

Objetivos

• Explicitar las relaciones de densidad y orden de este campo numérico.
• Reflexionar sobre la organización decimal del sistema de numeración.

En un primer momento, el docente conduce el juego en el pizarrón y toda la clase participa simultáneamente en la resolución del problema.

Consigna

Este es un juego en el que para ganar van a tener que averiguar el número que pensé y anoté en mi carpeta. Para eso, van a hacer preguntas y a través de las respuestas que yo les dé tienen que llegar a saber, con exactitud, cuál es el número en cuestión. Para organizar la información, voy a registrar en el pizarrón todo lo que vaya surgiendo. El número que pensé está comprendido entre el 0 y el 10.

El docente dibuja una recta numérica como la siguiente:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Al dar la consigna, los alumnos comenzarán a realizar preguntas que, en un principio, suelen ser del tipo: "¿Es el cinco?".

Supongamos que el docente anotó en su carpeta el siguiente número: 4,738, entonces responderá: "No, es menor".

Alumno (A): ¿Es el cuatro?

Docente (D): No, es mayor.

Seguramente, esta respuesta provocará desacuerdos ya que, como sabemos, muchos alumnos no aceptan que entre los números 4 y 5 haya otros infinitos números posibles. Salvado el desacuerdo, el docente dibujará debajo de la anterior otra recta numérica cuyos extremos estarán comprendidos por:

4 4,1 4,2 4,3 4,4 4,5 4,6 4,7 4,8 4,9 5

A: ¿Es el 4,5?

D: No, es mayor.

A: ¿Es el 4,7?

D: No, es mayor.

A: ¿Es el 4,8?

D: No, es menor.

Nuevamente aparecerá el desacuerdo. Las discusiones deberán orientarse a que los alumnos establezcan vinculaciones con lo que pudieran haber trabajado, por ejemplo, en el contexto del dinero.

El docente hará una nueva recta cuyos extremos estarán comprendidos por:

4,7 4,71 4,72 4,73 4,74 4,75 4,76 4,77 4,78 4,79 4,8

Se abre una nueva ronda de preguntas:

A: ¿Es el 4,75?

M: No, es menor.

A: ¿Es el 4,74?

M: No, es menor.

A: ¿Es el 4,73?

M: No, es mayor.

El docente comunica, entonces, que va a trazar una nueva recta que en este caso tendrá sus extremos comprendidos por:

4,73 4,731 4,732 4,733 4,734 4,735 4,736 4,737 4,738 4,739 4,74

Finalmente, a través de las preguntas los alumnos llegarán a establecer que se trata del número 4,738 (Moreno y Quaranta, 2007).

Análisis de la situación

Esta situación permite trabajar aspectos de la notación decimal que generan obstáculos en el conocimiento de los alumnos. Las relaciones de orden y densidad propias de este campo numérico pueden ser identificadas al establecer sus vinculaciones con la organización decimal de nuestro sistema de numeración.

Es un buen contexto para identificar que las relaciones uno a diez heredadas de nuestro sistema de numeración se conservan en las posiciones a la derecha de la coma. Si se analizan las diferentes rectas de abajo hacia arriba, los alumnos pueden establecer que 10 milésimos equivalen a 1 centésimo, que 10 centésimos equivalen a 1 décimo y que 10 décimos equivalen a 1. Para que los alumnos descubran la regularidad de estas relaciones el docente puede plantear: ¿Qué sucedería si el número a averiguar tiene 4 cifras después de la coma? ¿Y si tuviera 5, 6 ó *n* cifras?

A posteriori, se podrá modificar la situación de manera que los alumnos jueguen entre sí, de a dos o en parejas. Unos son los que tienen que averiguar el número a través de preguntas; los otros, los que lo piensan, están a cargo de responder las preguntas y de organizar la información haciendo las rectas. Es importante que los alumnos tengan la oportunidad de jugar desempeñando ambos roles, por lo que será necesario jugar al menos dos veces. Tanto producir la recta, volcando la información necesaria, como interpretarla, para apoyarse en ella y formular nuevas preguntas, son buenas situaciones para poner en juego los conocimientos que nos interesan (Moreno y Quaranta, 2007).

Actividad 28 (para discutir en el encuentro presencial)

Analice la evaluación diagnóstica efectuada por un egresado de la Escuela Secundaria que se incluye en el Anexo 3 e indique si es factible vincular entre sí los errores de este alumno identificando su posible modo de conocer.

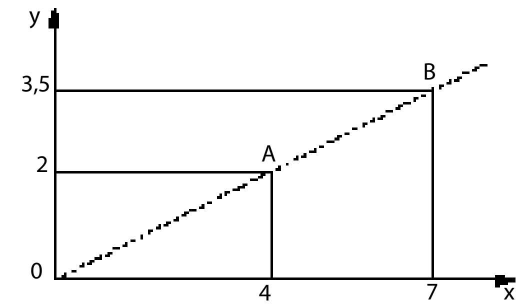
En la resolución de todos los ítems es posible identificar la utilización de un modelo aditivo en una situación multiplicativa, por lo que puede suponerse que para este alumno "agrandar es sumar". Es decir, se trata de la misma concepción que comentamos en el problema del rompecabezas.

Es importante notar que el error cometido en el último ítem es de la misma naturaleza que los anteriores: en el marco algebraico se suma una constante y en la ampliación del rectángulo se suma una banda del ancho constante.

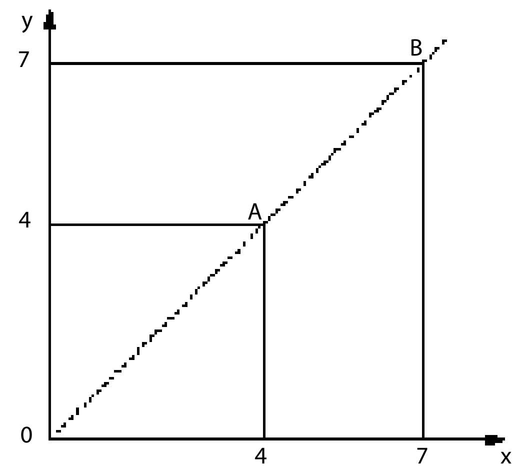
Una actividad que promueva un cambio de marcos puede ayudar a los alumnos a interpretar el porqué de los errores cometidos. Como sostiene Douady (1986):

> El juego de marcos traduce la intención de explotar el hecho de que la mayoría de los conceptos puede intervenir en distintos dominios, diversos marcos: físico, geométrico, numérico, gráfico u otros. En cada uno de ellos se traduce un concepto en términos de objetos y relaciones que podemos llamar los significados del concepto en el marco. Los significantes que tienen asociados pueden eventualmente simbolizar otros conceptos en el campo de los significados. Es el caso de representaciones gráficas de funciones y de representaciones en el plano de elementos materiales, algebraicos u otros, cuyas propiedades geométricas, topológicas o combinatorias podemos estudiar. Esto se obtiene de las correspondencias de significados de un mismo concepto en marcos diferentes, por un lado, y entre significados de conceptos diferentes representados en el mismo marco por los mismos significantes, por otro. Pero para los alumnos en tren de aprendizaje, los conceptos funcionan de manera parcial y diferente según los marcos. Por consiguiente, las correspondencias están incompletas.

Por ejemplo, se puede pedir a los alumnos que dibujen un sistema de coordenadas cartesianas, ubicando uno de los vértices de los rectángulos en el origen de coordenadas, lo que permitirá interpretar que para la ampliación correcta los puntos 0, A y B están alineados.



Posteriormente, es adecuado volver sobre el error algebraico y proponer la ampliación de una foto cuadrada, lo que permitirá discutir por qué en este caso es pertinente "agregar una faja de ancho constante", lo que no sucede en el caso de un rectángulo no cuadrado.



Actividad 29 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Le solicitamos que lea el punto *Acerca de los errores* del Diseño Curricular y complemente los análisis realizados en el encuentro presencial.

Actividad 30 (correspondiente a la evaluación de proceso)

Vuelva una vez más sobre la actividad 2 de la Unidad 1 y, de ser necesario, reformúlela. Justifique en cualquier caso.

Anexo 1

Se ofrece a continuación un extracto del capítulo 1 del libro *Enseñar Matemática hoy* de Patricia Sadovsky (2005).

Nuestra visión de la matemática

Nos ubicamos en una perspectiva según la cual la **matemática es un producto cultural y social. Cultural**, porque sus producciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la **sociedad** en la que emergen, y condicionan aquello que la **comunidad de matemáticos** concibe en cada momento como **posible y como relevante**. El análisis histórico es rico en episodios al respecto. Por ejemplo, la civilización griega del período clásico supuso que los hechos de la naturaleza obedecen a un orden que puede ser conocido a través de la Matemática (Kline, M; 1985). En particular, para los pitagóricos todos los objetos estaban hechos de partículas elementales de materia o "unidades de existencia" combinadas con las distintas figuras geométricas. El número total de unidades representaba el objeto material. El número era la materia y la forma del universo. Esto permite comprender por qué le atribuían a los números formas geométricas y por qué el estudio de la aritmética se centraba en las propiedades de estos "tipos de números" (triangulares, cuadrados, etc.).

La matemática es también un **producto social**, porque es producto de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. Las respuestas que plantean unos dan lugar a **nuevos problemas que visualizan otros**, y las demostraciones que se producen se **validan según las reglas** que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática. Son reglas que se van transformando en función de los conocimientos y de las herramientas disponibles, lo cual lleva a pensar que la idea misma de rigor matemático cambia con el tiempo.

La génesis escolar del trabajo matemático

Dado que es la actividad matemática en tanto actividad de producción la que nos interesa "producir" –que se produzca– en la escena del aula, tomar las ideas anteriores como referencia es para nosotros ineludible. Sin embargo pensar que "el asunto" de la clase es la actividad matemática –incluyendo los resultados de dicha actividad, por supuesto– no es una postura unánimemente compartida entre todas las personas involucradas en la educación matemática: hay quienes se centran en comunicar algunos "resultados" a la manera de discurso acabado, hay quienes hacen un recorte para la enseñanza que no toma al conjunto de la actividad matemática como referencia sino sólo una parte, y conciben la enseñanza como la comunicación de técnicas aisladas. Ni unos ni otros necesitan pensar en una génesis escolar que convoque a los alumnos a un trabajo de reconstrucción de ideas. Aunque la noción de génesis escolar se irá precisando a medida que avancemos en el desarrollo del libro, digamos por ahora que es necesario pensar en un proceso de producción en la clase que tenga en cuenta las condiciones de la institución escolar que son esencialmente diferentes de las que rigen la producción de saberes en la ciencia.

En primer lugar, los alumnos deberán elaborar conocimientos que –seguramente con rasgos diferentes– ya existen en la cultura. Las herramientas conceptuales de que dispondrán para hacerlo serán diferentes de las que fueron utilizadas cuando esos conocimientos "ingresaron" en la comunidad científica de la "mano" de matemáticos profesionales.[1] En otros términos, un matemático productor "sabe" muy distinto que un alumno de la escuela concebido como "matemático", lo cual obliga a pensar qué elementos tendría un alumno para reconstruir una idea que fue elaborada con otras herramientas y desde otro marco conceptual. Por otro lado, muchos de los "objetos" que se tratan en la clase de matemática de la escuela actual hace varios siglos que "abandonaron" su refugio original en la comunidad matemática y circulan por la sociedad "común", lo cual ha modificado una y otra vez sus sentidos. Por ejemplo, durante el período griego las razones de números naturales no eran considerados números sino justamente razones –relaciones–, en tanto que hoy los niños nacen en una cultura en la que las razones de números naturales son números y su esfuerzo se concentra en adaptarse desde el vamos a este funcionamiento. Esto hace que la complejidad que supone concebir un cociente como un número quede "oculta" en un funcionamiento naturalizado por la sociedad.

[1] En aras de resaltar las condiciones de funcionamiento del conocimiento escolar, estamos tal vez "simplificando" un poco las cosas: los conocimientos no "ingresan" un día determinado a la cultura ni tampoco lo hacen de la mano de "un" o "unos" matemáticos: se trata normalmente de procesos menos definidos. Pensamos, sin embargo, que esto no altera lo esencial de lo que queremos comunicar.

En segundo lugar, la escuela impone un modo de trabajo según el cual los saberes sólo pueden durar un cierto tiempo en la vida de la clase ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento en la escuela ya que los tiempos de aprendizaje no se rigen por la lógica de los "trimestres" o "bimestres".

Digamos finalmente que el sistema a través del cual se acreditan los aprendizajes no siempre "calza bien" con los recorridos que es necesario transitar para involucrarse verdaderamente en un proceso de producción…

Es difícil describir la actividad matemática –aun desde la concepción global de pensarla como producto social y cultural– sin caer en reduccionismos de algún tipo. Cualquiera que haya estudiado matemática –es el caso de los profesores actuales o futuros– "tuvo" que resolver unos cuantos ejercicios y problemas como parte de su trabajo de estudiante. Seguramente habrá sorteado para ello complejidades muy diversas: en algunos casos habrá tenido que "replicar" las pautas dadas por un problema "tipo" correspondiente a una cierta teoría, en otros habrá pasado por momentos de incertidumbre –no saber qué hacer, no saber si se hizo bien– aun conociendo que el problema, por ser planteado como parte de las tareas de una cierta asignatura, requería de las herramientas tratadas en dicha asignatura. Algunos problemas habrán "mostrado" aspectos nuevos de una teoría, otros habrán servido para permitir la emergencia de una cierta técnica o para consolidarla; algunos habrán dado la posibilidad de explorar y ensayar poniendo en juego diversos conocimientos y otros habrán requerido de una herramienta sin la cual el problema no salía. Por otro lado, a través de un problema se pueden buscar resultados de muy diversa naturaleza: elementos de un cierto conjunto (números, matrices, vectores, funciones, etc.), construcciones, conjeturas, demostraciones, representaciones… Al revisar la propia trayectoria de estudio no es fácil establecer cuánto aportó cada una de estas situaciones a construir para uno mismo una representación acerca de qué es la matemática y cuáles son sus asuntos. Si analizamos en profundidad, seguramente encontraremos que algunos problemas "abiertos" –esos que requieren tomar muchas decisiones y que generan un gran nivel de incertidumbre– nos dejaron una huella importante porque nos permitieron acceder a una idea más o menos general, mientras que otros pudieron haber sido buenas experiencias pero quedaron aisladas sin que sus resultados se hayan podido insertar en alguna organización teórica. Por eso frases muy acuñadas como "la matemática se ocupa de problemas" o "hay que dar problemas y no ejercicios" o "no hay que dar técnicas", aunque parcialmente dignas de ser consideradas, dicen poco acerca de cómo estructurar un proyecto de enseñanza.

Anexo 2

Se reproducen a continuación tres memorias elaboradas por alumnos de 8º año de una escuela de la provincia de Buenos Aires, referidas a una clase en la que se trabajaron los problemas 1 y 2 de la secuencia desarrollada en la Actividad 15.

MARÍA VICTORIA

MEMORIA.

- APRENDIMOS A REALIZAR FÓRMULAS PARA CALCULAR LA SUP.
- APRENDIMOS A RESOLVER ALGUNOS CÁLCULOS, NO DE LA MANERA COMÚN, SINO desde otro punto de vista.

APRENDIMOS QUE NO SOLO HAY UN CAMINO PARA RESOLVER UNA COSA, SINO QUE HAY MUCHAS OPCIONES QUE PUEDEN ESTAR EN LO CORRECTO

Memoria del día 08/09/08:

Ailén

* Aprendimos a realizar una fórmula que represen-Ta la multiplicación de fracciones.
* Aprendimos el ¿Por qué? de las multiplicaciones.
* " a Poder realizar problemas/situaciones Sin algoritmos de cálculo.

NAHUEL

En esta clase lo que aprendimos fue como repre-sentar un problema dado sin realizar ningún algoritmo de cálculo.

También aprendí que no es necesario realizar cuentas para resolver problemas y que con las fórmulas, sin darnos cuenta, realizamos cuentas.

Anexo 3

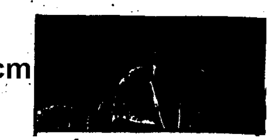
Se reproduce a continuación una evaluación diagnóstica extraída del "Programa de Fortalecimiento de Capacitadores de Matemática" del Ministerio de Cultura y Educación (2000).

Ampliaciones y reducciones

1. Queremos ampliar esta foto de manera que el largo sea de 7 cm. ¿Cuál será el ancho de la foto ampliada?

4cm + 3cm = 7cm.

2 cm



4 cm

P/ q' llegue a 7cm debo agregarle 3cm.

2. Si se desea reducir la misma foto (4 cm por 2 cm) de modo que el largo sea de 3 cm, ¿cuánto deberá medir el ancho?

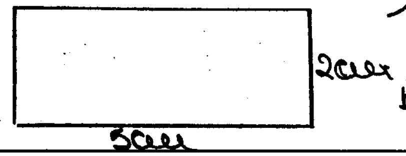
1cm

3cm

4cm - 1cm = 3cm.

El ancho debe medir 1cm.

3. Considerá ahora una foto de 5 cm de largo por 2 cm de ancho.
¿Cuál será el ancho si la foto: ...?
a) se amplía a 7 cm de largo
b) se reduce a 3 cm de largo



a) si se amplía en 7cm; ella será 4 cm.
2cm + 2cm = √4 cm
b) No se puede porque esto sería el ancho [illegible], 1

4 Frente al problema anterior un alumno respondió:
Si se suma lo mismo al ancho y al largo, por ejemplo 3, la proporción no cambia.

$$\frac{a}{l} = \frac{a+3}{l+3}$$

¿Pensás que su afirmación es correcta? En cualquier caso (sí o no) registrá tus argumentos.

Sí, funciona es una proporción directa.

Bibliografía

Berté, Annie, *Matemática dinámica*. Buenos Aires, A-Z Editora, 1999.

Brousseau, Guy, «Problemas de la enseñanza de los decimales». Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba, 1993 (Traducción de Dilma Fregona).

Butlen, Denis, «Dos ejemplos de situaciones de enseñanza de la matemática dirigida a alumnos con dificultades», en *Documentos para la formación de profesores de escuela en didáctica de la matemática*. Paris, IREM París-VII, 1996.

Centeno Pérez, Julia, *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid, Síntesis, 1990.

Charnay, Roland, *Pourquoi des mathématiques à l´école*. París, ESF, 1996.

______________ "Del análisis de los errores de los alumnos a los dispositivos de remediación: algunas pistas", Programa de Transformación para la Formación docente, Dirección Nacional de Programas y Proyectos, Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Buenos Aires, mimeo, 1991.

Crippa, Ana Lía, "Evaluación del y para el aprendizaje", en Chemello, Graciela y otros, *Estrategias de enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires, Universidad Nacional de Quilmes, 2000.

DGCyE, *Marco General para la Educación Secundaria en la Provincia de Buenos Aires*. La Plata, DGCyE, 2006.

DGCyE, *Diseño Curricular para la Educación Secundaria*, 2º año. La Plata, DGCyE, 2007.

Douady, Régine, "Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto", en *Recherches en Didactiques de Mathématiques* N° 2, Vol. 7. París, La Pensée Sauvage, 1986 (Traducción de circulación interna).

Douady, R. Approche des nombres réels en situation d'aprentissaage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). Recherches en Didactique des Mathématiques, 11, 77 – 110.

GCBA, "Matemática. Números racionales" (Barrero, Haydée y otros), Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. Buenos Aires, GCBA, 2006.

GCBA, "Matemática. Fracciones y Números Decimales (4, 5, 6 y 7). Apuntes para la enseñanza" (Sadovsky, Patricia y otros), Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. Buenos Aires, GCBA, 2005.

GCBA, Documento N° 2: "La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática" (Napp, Carolina; Novembre, Andrea; Sadovsky, Patricia y Sessa, Carmen), correspondiente a la serie "Apoyo a los alumnos de primer año en los inicios del nivel medio", Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. Buenos Aires, GCBA, 2000.

GCBA, Documento de trabajo N° 4: "Matemática" (Broitman, Claudia; Itzcovich, Horacio; Parra, Cecilia y Sadovsky, Patricia), Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. Buenos Aires, GCBA, 1994.

Margolinas, Claire, *De l`importance du vrai et de faux dans la classe de Mathématiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage, 1993.

Moreno, Beatriz y Quaranta María Emilia, *La enseñanza de la Matemática*. En prensa, 2008.

Rico Romero, Luis, "Pensamiento Numérico", en Hitt, Fernando (ed.), *Investigaciones en Educación Matemática*. México, Grupo Editorial Iberoamericano, 1996.

Sadovsky, Patricia, *Enseñar Matemática Hoy*. Buenos Aires, Libros del Zorzal*, 2005.*

Este libro se imprimió en Diebo en octubre de 2008 con una tirada de 1.700 ejemplares.

Matemática

Serie documentos para capacitación a distancia
Segundo año de la Educación Secundaria