

La Proporcionalidad

Programa

Maestros y profesores enseñando y aprendiendo

Proyecto

Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática
en la Educación Primaria Básica



**Dirección General de
Cultura y Educación**
Gobierno de la Provincia
de Buenos Aires

Subsecretaría de Educación

Provincia de Buenos Aires

Gobernador
Ing. Felipe Solá

Directora General de Cultura y Educación
Dra. Adriana Puiggrós

Subsecretaria de Educación
Ing. Eduardo Dillon

Director Provincial de Educación de Gestión Estatal
Lic. Nora Saporiti

Director Provincial de Educación de Gestión Privada
Lic. Juan Odriozola

Director Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa
Lic. Luciano Sanguinetti

Directora de Capacitación
Lic. Alejandra Paz

Directora de Educación Primaria Básica
Prof. Graciela De Vita

La Proporcionalidad

Programa

Maestros y profesores enseñando y aprendiendo

Proyecto

Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática
en la Educación Primaria Básica

Material destinado a equipos docentes,
directivos e inspectores

Especialistas

Ana Lía Crippa (coordinadora autoral)

Verónica Grimaldi

María Valeria Machiunas

Documento de apoyo para la capacitación

DGCyE / Subsecretaría de Educación

Dirección de Educación Primaria Básica
Torre Gubernamental I - piso 11
Calle 12 y 50 (1900) La Plata
Provincia de Buenos Aires
Tel. (0221) 4295291
E-mail: subdep@ed.gba.gov.ar

dir_contenidos@ed.gba.gov.ar

Índice

	Presentación	9
1	La proporcionalidad, una oportunidad para discutir el enfoque de enseñanza del área.....	9
	¿Por qué enseñar proporcionalidad?.....	9
	Hacia una matemática para todos	11
	Aprender proporcionalidad, saber proporcionalidad	14
	El tiempo y la construcción de sentido de las nociones a aprender	18
	A modo de cierre	21
	Bibliografía.....	22
2	La proporcionalidad y la clase de matemática en el Segundo Ciclo de la EPB	23
	Reflexiones acerca del tratamiento de la proporcionalidad	24
	Recuperar problemas de multiplicación	24
	Estrategias que facilitan la resolución	25
	Concepto versus método	27
	Proporcionalidad y tablas de multiplicar	29
	A propósito de leyes no válidas.....	30
	Propuestas y reflexiones acerca de la enseñanza de la proporcionalidad.....	31
	Análisis de una situación de enseñanza: agrandando figuras.....	31
	La proporcionalidad en un aula de sexto año: análisis de un registro de clase	33
	Acerca de los procedimientos	34
	Acerca de la puesta en común.....	36
	Secuenciación de los problemas	40
	Consideraciones generales.....	40
	Análisis de un ejemplo referido a la noción de porcentaje	41
	A modo de cierre	43
	Bibliografía	44
3	Vínculos entre la proporcionalidad y diferentes contenidos del área.....	45
	Proporcionalidad, números y operaciones.....	46
	Proporcionalidad directa y multiplicación de números naturales: las tablas de multiplicar.....	46

Proporcionalidad directa y equivalencia entre fracciones	46
Proporcionalidad directa y multiplicación y división de un número natural por uno racional en sus expresiones decimal y fraccionaria	47
Proporcionalidad inversa y multiplicación de racionales.....	49
Proporcionalidad inversa	49
Proporcionalidad directa y medida	50
Proporcionalidad directa y magnitudes de la misma naturaleza	50
Cambios de unidades. Magnitudes fundamentales y derivadas	50
Figuras de la "misma forma"	51
Proporcionalidad directa y magnitudes de diferente naturaleza	53
Proporcionalidad y probabilidades.....	53
Proporcionalidad y funciones	54
Funciones de proporcionalidad directa	55
Funciones de proporcionalidad inversa	58
A modo de cierre.....	59
Bibliografía	60
Anexos	61
Capítulo 1	61
Anexo único	61
Capítulo 2.....	62
Primer anexo	62
Segundo anexo	63
Tercer anexo	64
Cuarto anexo	65
Capítulo 3	71
Anexo único	71



Presentación

Este material ha sido elaborado en el marco del proyecto Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en EPB, de la Dirección de Educación Primaria Básica. Dicho proyecto impacta sobre el 2º ciclo de la EPB de las escuelas urbanas, durante el 2005 en cuarto año, con la intención de que se instale en toda la EPB. El propósito es que la metodología de resolución de problemas y reflexión sobre lo realizado sea el eje de trabajo tal como lo proponen los documentos curriculares de nuestra jurisdicción. Apunta además, a fortalecer el rol capacitador de los supervisores.

Con el doble objetivo de capacitar a los "supervisores tutores" y a los directivos y maestros de segundo ciclo de escuelas urbanas, se diseñó el material *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB*.

Este nuevo material será trabajado con docentes de sexto año y directivos de escuelas urbanas de EPB. En este caso también recibirán una capacitación los supervisores areales por los profesores de Matemática de los equipos técnicos regionales, para que luego actúen como tutores en el año 2006.

Las reflexiones que aquí incluimos intentan promover discusiones en torno a la enseñanza de la proporcionalidad en el Segundo Ciclo de la EPB.

Para acercarnos al mencionado propósito, en el capítulo 1 desarrollamos cuestiones referidas al enfoque para la enseñanza de la matemática adoptado por esta jurisdicción, refiriéndolas, cuando resulta pertinente, al tratamiento de la proporcionalidad.

Algunas de las cuestiones que se incluyen han sido desarrolladas en el material *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en la EGB*. Pensamos que volver sobre ellas a propósito de la temática específica que se aborda permitirá resignificarlas.

El capítulo 2 está centrado especialmente en el análisis de problemas para el desarrollo de la temática en cuestión, de su posible gestión en la clase de Matemática y de criterios que permitan secuenciar actividades en función de la finalidad que se adopte.

En el capítulo 3 se discuten posibles vinculaciones de la proporcionalidad con diferentes contenidos de la currícula, intentando potenciar la conocida naturaleza estructurante de esta temática.

Estamos convencidas que este material se enriquecerá con la puesta en aula de las situaciones analizadas y un posterior análisis crítico que incluya los conocimientos derivados de las características peculiares de cada aula y de cada institución.

1

La proporcionalidad, una oportunidad para discutir el enfoque de enseñanza del área

Habitualmente no se cuestiona la inclusión de la matemática en la escuela obligatoria. Sin embargo, algunas cuestiones referidas a su enseñanza pueden originar polémicas. ¿Por qué enseñar matemática en la escuela? ¿Se trata de una enseñanza que habilita un espacio de formación o se convierte en instrumento de exclusión de los alumnos del sistema educativo?

Iniciaremos este debate centrándonos en las razones que, según entendemos, otorgan significación a la enseñanza de la matemática en general, y de la proporcionalidad, en particular. Posteriormente, analizaremos diferentes perspectivas sobre cómo se concibe la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Nos centraremos en la forma en que esas concepciones pueden generar dificultades, como desigualdades en el acceso de los alumnos a los conocimientos de esta disciplina. Por último, desde el enfoque adoptado por esta jurisdicción, desarrollaremos algunos aspectos referidos a la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en la escuela, que retomaremos a lo largo de este módulo, para que sean profundizados en la discusión con sus colegas.

¿Por qué enseñar proporcionalidad?

En principio, se podría suponer que la respuesta a esta pregunta resulta más que evidente: el estrecho vínculo entre la proporcionalidad y numerosos problemas de nuestro entorno, o de las ciencias, hace que esta temática sea reconocida como parte de los conocimientos básicos que toda persona debe poseer. Y esto, unido a la sostenida presencia de la misma en diferentes currículos, puede derivar en el riesgo de naturalizar su enseñanza.

Por ello, para abordar la pregunta propuesta es importante detenernos en analizar algunas de las cuestiones centrales que hoy día legitiman la enseñanza de la matemática en general, vinculándolas con aspectos inherentes a la proporcionalidad.

Actividad 1.1

Antes de continuar con la lectura de este capítulo, retomen el apartado titulado “¿Por qué enseñar Matemática en la EGB?”, del Módulo Aportes para la Enseñanza de la Matemática en la EGB, página 9.

Posteriormente, formulen dos afirmaciones y dos interrogantes, vinculados con la enseñanza de la proporcionalidad. Guarden sus respuestas para volver sobre ellas una vez avanzada la lectura de este módulo.

La enseñanza de la matemática suele justificarse porque permite resolver diversidad de problemas pertenecientes al mundo social, económico, de las ciencias naturales, es decir, problemas externos. A continuación reflexionaremos sobre este aspecto.

- **La matemática es útil para los individuos en cuanto actores sociales y económicos.**

Es indudable que cada uno de nosotros necesita un mínimo de conocimientos matemáticos para desenvolverse en nuestra vida cotidiana y profesional. Con relación a la proporcionalidad, la simple elección al comprar productos de acuerdo a la relación peso/precio como así también las informaciones gráficas y numéricas, que exigen de una interpretación crítica, son algunas de las acciones que requieren de la utilización de nociones y procedimientos vinculados con la misma. Sin embargo, no sólo se trata de presentar una diversidad de problemas de estos ámbitos para que los alumnos apliquen conocimientos aprendidos. Los problemas se reformulan y cambian día a día, y abordarlos requiere de conocimientos versátiles. Esto mismo es requerido por la movilidad laboral que caracteriza nuestra sociedad actual.

Como señala Charnay (1996), la "matemática útil no se limita a aquella que es directamente utilizada" sino que se extiende a la que permite disponer de herramientas para actualizar los conocimientos disponibles.

- **La matemática es útil para resolver problemas de diversas disciplinas.**

También es indiscutible la necesidad de contar con herramientas matemáticas para abordar problemas de diferentes disciplinas escolares. Así, numerosos ejemplos en Ciencias Naturales abonan en esta línea: la velocidad, el peso específico, la densidad, la presión, las concentraciones, el principio de masa, entre otras, son nociones estrechamente vinculadas con la proporcionalidad. Asimismo, en Ciencias Sociales la proporcionalidad aparece en diferentes temáticas: densidad de población; tasa de natalidad; escalas de mapas y gráficos.

En ese caso, tampoco se trata sólo de presentar problemas de estas ciencias a fin de que los alumnos apliquen sus conocimientos. La relación de la matemática con las diferentes disciplinas es una relación dialéctica, lo que remite a pensar en la posibilidad de partir de problemas de tales disciplinas para abordar nociones matemáticas, en los ciclos superiores.¹ De este modo, la escuela tendría una oportunidad de desarrollar una verdadera cultura científica y matemática, que es una de sus responsabilidades.

Sin embargo, si bien reconocemos la potencia instrumental de esta disciplina, consideramos que el principal interés de la enseñanza de la matemática no responde únicamente a necesidades externas.

- **La matemática es un producto cultural que la escuela tiene la responsabilidad de transmitir.**

En este sentido, la enseñanza de la matemática debe permitir a los alumnos "ingresar" a una racionalidad muy diferente de la cotidiana, diferente a la de otras áreas del conocimiento, una racionalidad tan particular que sólo puede ser abordada en el ámbito educativo. Se trata de la transmisión de una forma de cultura, la cultura matemática que incluye múltiples aspectos. Como señala Roland Charnay (1996, traducción propia):

"¿En qué se reconoce la cultura matemática de un individuo? ¿En la cantidad de matemática que conoce: conceptos, teoremas, resultados, etc.? ¿En el hecho de que vincule esos conocimientos con determinados tipos de problemas internos o externos a la matemática que los legitiman, representando su origen o su gran fecundidad? ¿En estar al tanto de los "acontecimientos matemáticos" que jalonaron la historia de las civilizaciones? ¿En su capacidad para plantear y resolver problemas? ¿En su capacidad para probar lo que afirma por medio de razonamientos particulares? ¿En las representaciones que tiene de lo que son los objetos matemáticos y la actividad matemática?"

¹ Por ejemplo, en séptimo año, la noción de velocidad en su caso más simple, es decir cuando es constante (el movimiento es rectilíneo y uniforme), resulta ser un excelente recurso para abordar la función de proporcionalidad directa.

Todo a la vez, pues no podría haber actividad matemática sin conocimientos precisos, ni cultura matemática sin una verdadera actividad matemática y sin reflexión sobre los resortes y las herramientas específicas de que esta disciplina dispone”.

Es la apropiación de esta forma de cultura lo que contribuirá a su conservación y distribución.

Actividad 1.2

Vuelvan sobre las afirmaciones e interrogantes que plantearon en la actividad anterior y amplíenlos o reformúlenlos teniendo en cuenta los aspectos abordados en este capítulo.

Hacia una matemática para todos

Durante el siglo XVII, Juan Amos Comenio propuso, en su *Didáctica Magna* lo que denominó un “método que permitiera enseñar todo a todos”:

“...hay que tomar en cuenta algo importantísimo: “nadie” debe ser excluido de una educación ya que es la principal fuente de sabiduría del propio ser humano. A todos por consiguiente hay que tratarlos como se merecen y no menospreciar a otros que les cuesta más trabajo asimilar una cosa, por eso también hay que explicar todo de acuerdo a la capacidad de cada persona. Se llama escuela a la presentación sistemática de hechos, ideas, habilidades y técnicas a los estudiantes. Todos los hombres deben ser encaminados a los mismos fines, todos los hombres son únicos e irrepetibles, con capacidades y limitaciones, con virtudes y habilidades, con aptitudes y destrezas.” (citado en Hanfling, 2004).

Sin embargo, hoy día y en infinidad de oportunidades, ya sea a lo largo de nuestro recorrido como alumnos, como miembros de la comunidad o como docentes, solemos escuchar frases como las siguientes (frases que difícilmente escuchamos sobre otras disciplinas): “No, la matemática no es para mí”; “Salió a mí, nunca va a entender matemática...”, como si aprender matemática estuviese reservado a algunos “privilegiados” ya sea por pertenecer a una determinada clase social o por haber heredado esa capacidad.

¿Por qué, entonces, tales representaciones? ¿Es posible una matemática a la que todos puedan acceder?

A fin de reflexionar acerca de estas cuestiones es necesario centrarnos en las diversas concepciones acerca de **qué es la matemática**, qué características tienen sus **objetos propios**, qué significa **hacer matemática** y qué se considera **aprender matemática**. La importancia de tener en cuenta tales concepciones reside en que, aun de modo implícito, están presentes en todos los docentes.² Y, por ende, configuran sus propuestas de enseñanza.

En párrafos anteriores hemos hecho referencia al principal interés de la matemática en la escuela: permitir a los alumnos ingresar a una cultura particular. Esta postura deriva de situar la **producción matemática** en el conjunto de las **producciones del hombre**, es decir, considerar que surge **del trabajo del hombre**, y significa concebir la matemática como **producto cultural**.

Los conocimientos matemáticos han surgido como respuesta a problemas externos o internos a esta disciplina. En el intento de resolver problemas, se recorren distintas etapas no todas necesarias ni sucesivas: etapas de búsqueda de soluciones, en las que intervienen la intuición, la inducción empírica, la formulación de conjeturas; etapas de elaboración de pruebas; etapas en las que el problema en cuestión da lugar a nuevas preguntas; etapas de comunicación de resultados.

² Y en muchos casos, coexisten diversas concepciones.

Pero antes de comunicar a otros lo que se piensa haber encontrado, es necesario precisarlo: no es simple distinguir, entre la trama de reflexiones realizadas, las que son susceptibles de llegar a ser un saber nuevo y de interés para la comunidad de matemáticos. Por otra parte, las demostraciones realizadas pocas veces coinciden con los resultados previos, lo que hace necesario reorganizar los conocimientos y procedimientos puestos en juego, eliminar discusiones inútiles y direcciones infructuosas. Asimismo, para que la producción realizada pueda ser entendida y utilizada por otros es necesario separarla del problema particular, generalizándola.

Ahora bien, los conocimientos elaborados no han permanecido inmutables: en el transcurso de los años se han transformado al ser utilizados por distintas sociedades, culturas e instituciones, cobrando sentido a lo largo de dicha evolución.

Por ejemplo, en la Matemática Griega sólo se establecían proporciones entre magnitudes de la misma naturaleza, es decir, comparando longitudes con longitudes, tiempos con tiempos, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes porque para ellos carecía de sentido hacerlo entre dos magnitudes de diferente naturaleza. Así, al estudiar el movimiento rectilíneo y uniforme establecían comparaciones como la siguiente: $d': d = t': t$, siendo d y d' las distancias recorridas y t y t' los correspondientes tiempos. Pero no se efectuaban comparaciones tales como: $d': t' = d: t$, es decir velocidades,³ como lo hacemos hoy día.

Desde la concepción de matemática como producto cultural, se considera que si es algo que hizo el hombre, todos los alumnos pueden acceder a la forma de pensar y producir de esta disciplina, trabajando del modo que se trabaja en el interior de la misma. Luego, para **aprender matemática** es necesario "hacerla", es decir, "ocuparse de problemas", en un sentido que involucra:

- encontrar soluciones y plantear buenas preguntas;
- utilizar las reglas que rigen los razonamientos válidos;
- interpretar las diferentes formas en que se representan los objetos propios;
- reconocer los conocimientos utilizados en la resolución de diferentes problemas fuera de los contextos en que estaban insertos;
- responsabilizarse matemáticamente de las propias respuestas.

Esa forma particular de hacer y de pensar es lo que permitirá, en forma análoga a lo que sucede en el mundo matemático, que los alumnos otorguen sentido a los conocimientos en cuestión, y depende de las decisiones didácticas que se adopten. Sobre este aspecto volveremos a lo largo del presente módulo.

Ahora bien, no todas las personas, y por ende no todos los docentes, conciben la matemática ni sus objetos del mismo modo, por lo que tampoco conciben del mismo modo su aprendizaje y su enseñanza. Algunos piensan que la matemática se ocupa de objetos que tienen existencia propia, aunque no sea física ni material, y que no fueron creados sino descubiertos, por lo que no pueden cambiar ni desaparecer. En esta perspectiva⁴ se considera que para aprender matemática hay que descubrirla, por lo que la mejor manera de enseñarla es "mostrando" sus objetos, del mismo modo que para que un niño comprenda lo que es un elefante se le muestra una foto, una película o se lo lleva a un zoológico.

Pero, ¿cómo es posible mostrar un objeto matemático? Dado que se trata de que los alumnos compartan algo a lo que el docente ya accedió, para mostrar los objetos se los describe mediante sus definiciones y sus propiedades, sin promover discusiones ni generar dudas, es decir, sin proponer "verdaderos problemas".

En otra perspectiva,⁵ se niega la existencia propia de los objetos matemáticos, sosteniendo que sólo es posible acceder a ellos mediante axiomas o definiciones. Se considera que esta disciplina está constituida por un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas. Aprender matemática es, entonces, conocer resultados, acceder a algo estático y acabado, y en tal sentido, la tarea del docente también se restringe a presentar axiomas, definiciones y reglas válidas, controlando su **rigurosa** utilización.

³ Recordemos que en un movimiento rectilíneo y uniforme la velocidad se define como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla.

⁴ La perspectiva descripta se puede enmarcar en la corriente platónica.

⁵ Esta concepción de la matemática, y la que se comenta a continuación, pueden vincularse con las corrientes formalistas.

En muchos casos, la fundamentación de propuestas como esta última se apoya en una necesidad de rigor, particularmente en el rigor del lenguaje: **cuando se deja de lado la actividad matemática el lenguaje es el único soporte del concepto matemático** (Charlot, 1996). En esta perspectiva el docente impone de entrada un lenguaje riguroso sin considerar que, al igual que en el mundo matemático, es la comunicación de resultados de una actividad matemática lo que hace surgir la necesidad de rigor. Como señala Bkouche (1991):

"No se trata de dar el espectáculo del rigor, de manera de mostrar una matemática que funciona bien y esperar que algunos "dotados" hayan aprendido algo mientras la mayoría manifiesta admiración arrobada o rechazo. Quiero denunciar aquí una concepción anticientífica y dogmática. A través de este "espectáculo" los alumnos "ven matemática", oyen un discurso matemático riguroso, pero esto no tiene significación y la mayoría de los alumnos no aprende nada más que recetas, no retienen más que la impresión de la inaccesibilidad de la ciencia que se les muestra. En este sentido, la matemática se convierte en instrumento de selección".

En el marco de una creencia similar, pero en posiciones extremas, se piensa que la matemática es un conjunto de reglas a partir de las cuales se pueden deducir fórmulas, pero las mismas no se refieren a nada, sólo constituyen un encadenamiento de símbolos, por lo que aprender matemática se reduce a memorizar y utilizar reglas.

Ahora bien, ¿es posible que una matemática algorítmica, alejada de los problemas que han dado origen a los conceptos, permita una construcción de conocimiento con sentido, por parte de los alumnos? Es más, ¿qué sentido puede tener para un alumno limitarse a aplicar reglas, la misma tarea que puede realizar una máquina?

Debemos destacar que, en muchos casos, las tres últimas perspectivas descritas funcionan, de algún modo, en forma coexistente. Entre otras cuestiones, la "resolución de problemas" se incluye en todas ellas, pero dicha resolución se limita a una aplicación de lo aprendido, ocupando así una posición secundaria. Es decir, se prioriza un tratamiento que funciona "al revés" que la actividad matemática, que parte de problemas, y avanza en la construcción de conocimientos.

Algunas de las dificultades atribuidas a la "abstracción" dieron cabida a propuestas centradas en el vínculo de la Matemática con la realidad, en las que se considera que para aprender matemática es necesario manipular sus objetos, y se reflejan en una enseñanza centrada en "problemas concretos y motivadores de la vida cotidiana". Este tratamiento es el que se ha priorizado hace un tiempo atrás, y respecto del mismo señalaremos algunos aspectos que consideramos esenciales.

Con relación a la "manipulación", cabe aducir que, al considerar que los objetos matemáticos pueden percibirse a partir de la interacción con objetos reales, se tergiversa la característica distintiva de los mismos: son los únicos objetos a los que sólo puede accederse por medio de una representación. Por ejemplo, todos hemos visto un "tres" expresado en decimal o en sistema romano, pero nunca pudimos ver el objeto "tres".

Respecto de la motivación, consideramos de interés la reflexión realizada por Bkouche (1991).

"Lo que da profundamente sentido en la actividad matemática, no es que es curiosa, útil, entretenida, sino que se enraza en la historia personal y social del sujeto. Toda situación de aprendizaje, más allá de aspectos específicamente didácticos, plantea dos preguntas ineludibles. ¿Cuál es el sentido de esta situación para aquel que aprende? ¿Cuál es la imagen de sí mismo, de sus capacidades, de sus oportunidades de éxito en esta situación? En términos más triviales, ¿qué hago acá? ¿Soy capaz? ¿Vale la pena? Esta relación con el saber pone en juego los deseos, el inconsciente, las normas sociales, los modelos de referencia, las identificaciones, las expectativas, los pareceres sobre el porvenir, los desafíos personales. ... Es muy reductor invocar simplemente aquí palabras tan vagas como "curiosidad" o incluso "motivación". El problema no es suscitar la curiosidad, sino proponer a los jóvenes las actividades, las prácticas, los

itinerarios de formación que toman sentido en una red compleja de deseos, de expectativas, de normas interiorizadas y que contribuyen a reestructurar esa red”.

Por último, si bien no debe dejarse de lado que el alumno comprenda que esta área del conocimiento ofrece herramientas para resolver ciertos problemas de la “realidad”, muchos problemas de los utilizados comúnmente, en el marco de propuestas de esa naturaleza, suelen restringirse a actividades aisladas y triviales, en las que se propicia una acción material por sobre una intelectual, que en muchos casos se limita a una utilización, generalmente algoritmizada, de reglas.

Actividad 1.3

Con relación a la conocida “regla de tres”, Panizza, M. y Sadovsky, P. (1991) plantean que “el status con que se presenta el método ubica al alumno en la situación de estar aprendiendo un concepto nuevo (el de proporcionalidad), cuando en realidad está aprendiendo un método (que es válido cuando hay proporcionalidad). Todo eso crea una confusión entre el concepto y el método, y tiene como una de sus consecuencias el aprendizaje de un mecanismo ciego, independiente de los problemas que permite resolver”.

Seleccionen tres libros de texto para el Segundo Ciclo de la EPB e indiquen si en alguno de ellos se realiza un tratamiento que no promueva la “confusión entre el concepto y el método” que señalan las autoras. Justifiquen su respuesta.

Concurran al próximo encuentro con los libros seleccionados y comenten con sus compañeros las conclusiones a la que hayan arribado.

A modo de síntesis destacamos nuestra posición: si el aprendizaje de la matemática promueve desigualdades en el acceso de los alumnos a esta porción de la cultura que ha construido la humanidad es porque las propuestas de enseñanza no promueven una verdadera actividad intelectual por parte de los mismos: algunas de ellas hacen que los alumnos perciban la Matemática como inalcanzable en cuanto disciplina abstracta, y otras que la perciban trivial, en cuanto a su aspecto material.

Finalmente, sostenemos que pensar en una matemática para todos implica poner bajo la lupa que en la escuela se puede enseñar a hacer como que se aprende, se puede enseñar a no aprender y se puede enseñar a aprender que uno no puede aprender, atribuyendo causas a factores hereditarios o sociales.

Aprender proporcionalidad, saber proporcionalidad

Como hemos señalado en el apartado anterior, sobre la base de la concepción de matemática adoptada para aprender matemática es necesario construir el sentido de los conocimientos. Guy Brousseau (1983) caracteriza el sentido de un conocimiento matemático que se define “no sólo por la colección de situaciones donde ese conocimiento es realizado como teoría matemática; no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución, sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma”.

Desde esta caracterización, entendemos que un alumno ha construido el sentido de un conocimiento cuando está en condiciones de reconocer qué problemas permite resolver, en qué problemas resulta insuficiente, en qué problemas facilita la resolución y la hace más simple, qué dificultades permite superar.

Centrados en la construcción de sentido, y con relación a la proporcionalidad, una vez finalizada la escuela,⁶ un alumno debería ser capaz de:

⁶ A fin de dar una idea global, hemos incluido conocimientos que se desarrollan en ESB.

- Diferenciar situaciones de proporcionalidad directa e inversa de las que no lo son, argumentando la propuesta de clasificación.
- Comparar situaciones de proporcionalidad en las que intervienen un mismo tipo de magnitudes expresadas en las mismas o en distintas unidades.
- Articular las diferentes formas en que puede ser representada una situación de proporcionalidad, y seleccionar la más adecuada en función del problema a resolver.
- Reconocer la fórmula y la gráfica cartesiana como representaciones privilegiadas para analizar la variabilidad y dependencia de las cantidades de magnitudes involucradas en la relación de proporcionalidad.
- Vincular el funcionamiento de las relaciones de proporcionalidad en problemas de aritmética, de medida, de funciones y de probabilidades.
- Identificar las definiciones y las propiedades características, y poner en juego la/s más eficaz/es en función del problema a resolver.

Actividad 1.4

Seleccionen o reelaboren problemas que permitan abordar las tres primeras cuestiones planteadas y justifiquen su elección.

En esta perspectiva, saber matemática en general, y proporcionalidad en particular, involucra **dos dimensiones**: la dimensión **instrumento** y la dimensión **objeto**. Explicaremos lo señalado a partir de un ejemplo.

Problema para los alumnos

Una empresa constructora quiere incorporar un pulidor de pisos de madera en forma permanente y pagarle de acuerdo a la superficie que pule. El empresario consultó a dos pulidores y cada uno presentó una tabla.

Pulidor 1

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	12	48	84	132	1440

Pulidor 2

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	39	66	93	129	1100

Los dos pulidores dicen que cobran una suma fija por metro cuadrado. El empresario duda, ¿cómo puede averiguar si alguien mintió?

Para hacerlo, el empresario puede utilizar diferentes procedimientos, algunos de los cuales se detallan a continuación.

Procedimiento 1

Pulidor 1:

$$\frac{12}{1} = \frac{48}{4} = \frac{84}{7} = \frac{132}{11} = \frac{1440}{120} = 12 = \text{constante}$$

Pulidor 2:

$$\frac{39}{1} \neq \frac{66}{4} \neq \frac{93}{7} \neq \frac{129}{11} \neq \frac{1100}{120}$$

Es decir, comparar el cociente determinado por las cantidades que se corresponden y verificar si se obtiene un valor constante, en ese caso, dicho valor es la constante de proporcionalidad, que se cumple para el Pulidor 1. En la resolución propuesta la constante de proporcionalidad es 12, y expresa el precio, en \$, que cobra el Pulidor 1 por pulir 1 m².

Pero también los cocientes se podrían haber planteado de este modo:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{48} = \frac{7}{84} = \frac{11}{132} = \frac{120}{1440} = \text{constante}$$

En este caso la constante es $\frac{1}{12}$ y expresa la cantidad de m² que se pueden pulir con \$1. Luego, la constante de proporcionalidad directa tiene dos valores posibles, según cuál de las cantidades esté en el lugar del dividendo y cuál en el lugar del divisor. Cuando hacemos referencia a que el valor es constante estamos asumiendo que la división la hacemos siempre en el mismo sentido. El problema propuesto también se puede resolver mediante el procedimiento que se describe a continuación.

Procedimiento 2

Pulidor 1

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	12	48	84	132	1440

Diagrama de Pulidor 1: Flechas indican multiplicaciones: 1 a 4 (x4), 4 a 7 (x7), 7 a 11 (x4), 11 a 120 (x7).

Pulidor 2

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	39	66	93	129	1100

Diagrama de Pulidor 2: Flechas indican multiplicaciones: 1 a 4 (x4), 4 a 7 (x7), 7 a 11 (x4). Se indica: X 4 : no se cumple, X 7 : no se cumple.

Es decir, comparando que al doble de una cantidad de las magnitudes involucradas le corresponda el doble de la cantidad de la otra magnitud, al triple, el triple,..., lo que se verifica para el Pulidor 1 y no para el Pulidor 2.

A continuación se describe otra forma de resolución posible.

Procedimiento 3

Pulidor 1

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	12	48	84	132	1440

Diagrama de Pulidor 1: Flechas indican sumas: 4+7=11 (Superficie), 48+84=132 (Precio).

Pulidor 2

Superficie a pulir (en m ²)	1	4	7	11	120
Precio (en \$)	39	66	84	129	1100

Diagrama de Pulidor 2: Flechas indican sumas: 4+7=11 (Superficie), 66+84≠129 (Precio).

Ahora bien, en las resoluciones precedentes⁷ la definición de proporcionalidad directa (procedimiento 1) y sus propiedades (procedimientos 2 y 3) se utilizan en la resolución de un determinado problema, es decir, están contextualizadas, por lo que tienen carácter de instrumento. Estas resoluciones están presentes en el segundo ciclo, aún cuando los alumnos no han tenido acceso a la definición ni al enunciado de las propiedades.

Pero saber proporcionalidad directa, también implica reconocer su **definición** y sus **propiedades** en forma independiente de un problema particular, formularlas, identificar su pertinencia para diferenciar este tipo de situaciones de proporcionalidad directa de las que no lo son. En este caso adquieren **carácter de objeto matemático**.

Proporcionalidad directa⁸

Definición

Una relación de correspondencia entre dos variables es de proporcionalidad directa cuando el cociente entre las cantidades que se corresponden siempre es el mismo. A ese cociente se lo llama constante de proporcionalidad.

Propiedades

- Al multiplicar (o dividir) una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se multiplica (o divide) por el mismo número y la proporción se mantiene.
- Al sumar (o restar) dos valores de una de las cantidades se obtiene un número correspondiente con la suma (o resta) de los valores correspondientes de la otra cantidad.

Ahora bien, el favorecer que los alumnos dispongan de saberes de esa naturaleza es un proceso a largo plazo. Desarrollaremos este punto en el apartado siguiente.

Por una parte, depende del tipo de tareas que se propone a los alumnos. Tal como lo señalamos, en esta perspectiva se enfatiza en un aprendizaje centrado en la resolución de problemas.⁹

Sin embargo, no sólo se trata de la selección del enunciado de un "buen problema". El docente debe lograr que los alumnos asuman la responsabilidad de resolverlo por sus propios medios, evitando comunicarles la respuesta; los conocimientos a los que apunta la resolución o algún juicio de valor que "dé pistas" acerca de la pertinencia de los procedimientos que pueden poner en juego.

Por otra parte y aún con un trabajo en la línea mencionada, la propuesta de un trabajo exclusivamente individual no genera los mismos aprendizajes que uno exclusivamente grupal, o un trabajo que combine ambas alternativas. Asimismo, las características de las intervenciones docentes pueden favorecer distintas aproximaciones al objeto en estudio, lo que deriva en aprendizajes diferentes.

En esta perspectiva el aprendizaje se ubica dentro de la clase a través de un proceso de negociación entre los alumnos, y entre los alumnos y el docente. Las interacciones entre los alumnos se manifiestan en las discusiones con respecto a los problemas, en las formulaciones que acompañan a los razonamientos, en la búsqueda de soluciones en grupos pequeños, en la formulación de la propia solución ante los demás, en volver en forma colectiva sobre tales soluciones, en la argumentación crítica con respecto a las diferentes estrategias que han sido desarrolladas por otros compañeros.

A modo de síntesis, y sobre la base de lo que comentamos, para favorecer la construcción de sentido de los conocimientos por parte de los alumnos, es adecuado que en la clase se contemplen

⁷ El problema propuesto también puede resolverse desde el marco funcional. Volveremos sobre este aspecto en el Capítulo 3

⁸ La proporcionalidad inversa se caracterizará en el Capítulo 3

⁹ En el módulo Aportes para el fortalecimiento de la Enseñanza de la Matemática en la EGB, páginas 24 y 25, se incluyen algunas condiciones que deberían cumplir los problemas, según Regine Douady. Le sugerimos que las lea o las relea antes de continuar con la lectura de este módulo.

diferentes instancias:

- instancias de presentación de las situaciones para su resolución en pequeños grupos;
- instancias de resolución efectiva por parte de los alumnos, en las que las intervenciones del docente se centren en aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo, sugiriendo lo que "se debe hacer";
- instancias de confrontación de resultados, de procedimientos y de argumentos empleados, en las que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado
- instancias en las que el docente realiza una síntesis de los conocimientos a los que llegó el grupo y establece las relaciones entre el conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, pone nombres a las propiedades, en caso de que sean nuevas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con otros ya estudiados, o con nuevos a trabajar, es decir comienza a **institucionalizar** los nuevos conocimientos.

Institucionalización

La institucionalización es el momento de la clase en el que el docente establece las relaciones que existen entre las producciones de los alumnos y el saber al que se apunta con la actividad. Es importante notar que se trata de un proceso que va más allá del reconocimiento "cultural" del saber en juego, y a partir del cual los conceptos identificados pueden ser reutilizados por los alumnos en la resolución de nuevos problemas.

Actividad 1.5

Analicen las indicaciones para el desarrollo de la etapa áulica del "Desafío matemático 2005" incluidas en el documento "Colega docente" (ver el anexo del capítulo 1) y vinculen las experiencias con las propuestas del documento, estableciendo similitudes y diferencias.

En forma conjunta con el proceso de institucionalización, se comienzan a descontextualizar los conocimientos puestos en juego en la resolución de los problemas, lo que permitirá que los alumnos reconozcan los saberes en forma independiente de tales problemas. Pero esto no implica "olvidarse" de los mismos pues ellos permitirán recordar los conocimientos elaborados a partir de su resolución para ser utilizados en otros problemas o para controlar otras resoluciones.

El tiempo y la construcción de sentido de las nociones a aprender

Los docentes sabemos que la mayoría de las nociones se construyen en largos períodos de tiempo. En particular, los problemas que tales nociones permiten resolver, y que contribuyen a otorgarles sentido, no tienen la misma dificultad y sólo podrán ser aprendidos en forma progresiva. Por ello, para cada noción es necesario poder establecer un amplio conjunto de problemas que la misma permita resolver, y para cada problema identificar qué conocimientos deberán tener disponibles los alumnos para abordarlos. También es necesario considerar en qué momento los alumnos podrán resolver los problemas con procedimientos personales y en qué momento podrán comprender procedimientos más eficientes.

La necesidad de hacer avanzar los procedimientos de los alumnos remite a pensar en un aprendizaje a largo plazo, en muchos casos a lo largo de varios años. Sin embargo, en relación, por ejemplo, con una de las expresiones usuales de la proporcionalidad, **los porcentajes**, es frecuente que no se aprecien diferencias de tratamiento en los últimos años del Segundo Ciclo con el que se da durante la ESB, pues, en ambas oportunidades, primero se define la noción y, a continuación, se presenta la regla usual: "Para calcular el 12% de una cantidad se multiplica esa cantidad por 12 y luego se divide el resultado por 100"

Sin embargo, es posible pensar en un tratamiento diferenciado en los diferentes grados o niveles. Por ejemplo, para iniciar el tratamiento de los porcentajes pueden proponerse problemas como el siguiente.¹⁰

¹⁰ El primer ejemplo, como así también algunos aspectos incluidos en este análisis han sido extraídos de Charnay, R. (1996)

Con respecto a esta última resolución, es importante notar que la interpretación de "2,5 habitantes" leen el diario puede crear algunas dificultades a los alumnos en cuanto a interpretar el significado de 2,5 en este contexto. Si no surge esa dificultad podría plantearse la discusión en torno a la misma.

Con el apoyo de un trabajo acerca del porcentaje que incluya problemas como los descriptos, es posible avanzar planteando problemas como el siguiente.

Un lavarropas cuesta \$ 960. Por pago en efectivo se realiza un descuento de un 15 %, ¿cuál es el nuevo precio?

Una posible resolución, que no apela a la memorización de fórmulas, es la siguiente:

Cada \$100, el precio se reduce en \$ 15

Para \$ 900, el precio se reduce en $\$15 \times 9 = \$ 135$

Para \$ 50, el precio se reduce en $\$15 : 2 = \$ 7,50$

Para \$ 10, el precio se reduce en $\$15 : 10 = \$ 1,50$

Y para $960 = 900 + 50 + 10$, se reduce en $135 + 7,50 + 1,50 = 144$

Es decir, el nuevo precio es \$816.

Continuando en esta línea, es conveniente plantear problemas que requieran la puesta a punto de procedimientos más generales, por ejemplo, considerando que el lavarropas cuesta \$ 969, 90 y que el descuento es del 14,50%. Estos valores dificultan la utilización del procedimiento anterior, lo que permitirá establecer la eficacia de los más generales.¹¹

Actividad 1.6

En colaboración con sus compañeros de Ciclo describan los criterios utilizados por tres propuestas editoriales para el Segundo Ciclo para el desarrollo del tema **Porcentaje**.

Sobre la base de la/s propuesta/s editoriales que considere adecuadas al enfoque, elaboren o reelaboren una secuencia para trabajar porcentajes en cada año del Ciclo, articulando con su colega del año anterior o posterior. Indiquen:

- Criterios utilizados para elaborar la secuencia
- Conocimientos a evaluar en cada año. Tenga en cuenta que esos conocimientos deberán permitir ponderar el trabajo realizado en cada año y resultarán un insumo para la planificación del año posterior. Guarde sus respuestas pues volveremos sobre ellas a lo largo del presente módulo.

Durante la ESB se pueden proponer problemas que involucren una composición de porcentajes.

En un supermercado realizan la siguiente oferta:

Los sábados: 15% de descuento pagando con tarjeta de débito. Recuerden que sobre el precio que paga le devuelven 5% de IVA.

Pedro cree que el descuento total es del 20 %. ¿Tiene razón? ¿Por qué?

Es posible que surjan procedimientos como los siguientes, y de ser así, resulta importante que los alumnos discutan cuál consideran más eficaz y por qué.

Suponer que se gastó un monto fijo, calcular el 15% y luego el 5%

Sin considerar un monto fijo, calcular el 5 % de \$ 85

¹¹ Por ejemplo, $P / 969,90 = 14, 50/100$

Para realizar un tratamiento como el descrito, en el que el sentido precedió a la técnica, es necesario aceptar que un tiempo aparentemente "perdido" en cuanto a "cantidad" de conocimientos abordados, es un tiempo "ganado", en cuanto a conocimientos menos numerosos pero elaborados por el alumno y, por ende, más anclados y disponibles.

Es habitual identificar "tiempos de enseñanza" con "tiempos de aprendizaje". Sin embargo, estos últimos son más largos y dificultosos, lo que debe preverse a la hora de planificar y secuenciar. También es necesario pensar en un tiempo para que los alumnos puedan volver hacia atrás con relación a lo trabajado anteriormente, no para hacer lo mismo, sino para "revisitar" nociones y procedimientos desde otra óptica, lo que permitirá profundizar los conocimientos puestos en juego. Desde este punto de vista, pensar la enseñanza y planificar las tareas a lo largo de un año como bloque temporal organizador, insertándola en un tiempo más amplio, que incluya los contenidos asociados que se abordan tanto en los años anteriores como posteriores al año en cuestión, aún cuando correspondan a distintos ciclos de la enseñanza, permitirá acompañar favorablemente la apropiación de conocimientos de las características de los que describimos.

Actividad 1.7

- ¿Qué conocimientos creen que deben tener disponibles los alumnos para poder abordar la resolución de cada uno de los problemas propuestos en este apartado?
- ¿En qué ejes/ ciclo se encuentran en el diseño de la provincia?
- ¿Qué problemas incluiría en cada año?
- Si eligen trabajar con problemas de esas características en los grados/ciclos en que se podrían incluir, ¿en qué instancia y bajo qué condiciones presentarían la noción de porcentaje? ¿Por qué?

A modo de cierre

Centrados en el tratamiento de la proporcionalidad, y extendiéndolo a los diferentes contenidos matemáticos escolares, intentamos destacar que, favorecer a los alumnos el ingreso a esa forma de cultura (que, como señalamos, es el principal motivo de la presencia de la matemática en la escuela), constituye la necesaria condición para que los mismos otorguen sentido a los conocimientos y razonamientos de esta disciplina.

De este modo, si bien no todos serán matemáticos, y que por otra parte no es nuestro objetivo, todos habrán "hecho" de "pequeños matemáticos" a lo largo de su escolaridad. Proponiendo problemas, promoviendo la discusión de diferentes soluciones, intentando que se acepte, como plantea Charnay (1996), que "el acceso al conocimiento está marcado por callejones sin salida de los que se logró salir", permitiendo que cada alumno, con sus propios recursos, se comprometa con las actividades planteadas, haciéndoles compartir un largo camino de construcción, se favorecerá el ingreso de todos nuestros alumnos a esta producción del hombre, accesible para todos.

Bibliografía

- Bkouche R. y otros, *Faire des mathématiques: les plaisirs du sens*. Paris, Armand Colin, 1991.
- Brousseau, G., "Los diferentes roles del maestro", en Parra C. y Saiz, I., *Didáctica de la Matemática. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires, Paidós, 1994.
- Charlot, B., "Epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de la Matemática". Conferencia dictada en Cannes, 1986.
- Cobb, P., "Where is the mind? A coordination of Sociocultural and Constructiviste Perspectives", en *Constructivims; Theory, Perspective, and Practique, Teachers Colleges, Columbia University*, 1996.
- Charnay, R., *Pourquoi des mathématiques à l'école?* Paris, ESF éditeur, 1996.
- Chemello, G. y Diaz, A., *Matemática. Modelos didácticos*. Buenos Aires. Prociencia, Conicet, 1997. Capítulo 1.
- DGCyE, *Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires*. La Plata, DGCyE, 2001.
- Godino, J. y otros, *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática para maestros*. Granada, Proyecto Edumat- Maestros, 2003.
- Hanfling, M., "Una mirada retrospectiva y algunas líneas de hoy hacia adelante en la enseñanza de la matemática". Sin publicar. Conferencia ofrecida en el marco del postítulo "Nuevas alfabetizaciones". Escuela de Capacitación CePA, Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires , 2004.
- Panizza, M. y Sadovsky, P., *El papel del problema en la construcción del concepto matemático*. Flacso- Ministerio de Educación Provincia de Santa Fe, 1991.
- Parra C. y otros, Marco General. Prediseño Curricular para la Educación General Básica. Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, Dirección de Currícula, 1999.

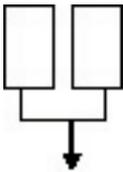
2

La proporcionalidad y la clase de matemática en el Segundo Ciclo de la EPB

Desde edades muy tempranas los niños se relacionan con situaciones vinculadas con la proporcionalidad. En el Primer Ciclo es usual que se les planteen cuestiones como la siguiente.

Sabemos que dos cuadernos cuestan \$ 7 y que no hay ninguna promoción, ¿cuánto costarán ocho cuadernos?

La relación entre la cantidad de cuadernos y el precio es una relación de proporcionalidad, y suele utilizarse de manera implícita en posibles resoluciones.

<p>Resolución 1 8 cuadernos = 2 + 2 + 2 + 2 4 cuadernos cuestan $\\$7 + \\$7 + \\$7 + \\$7 = 28$</p>	<p>Resolución 2 Compramos: $4 \times 2 = 8$ Pagamos: $4 \times \\$7 = \\28</p>								
<p>Resolución 3</p>  <p>7</p> <p>Para gráfica: repetir 4 veces el dibujo y luego colocar cuestan \$ 28</p>	<p>Resolución 4</p> <p>Tablas</p> <table border="1"><tr><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>14</td></tr><tr><td>6</td><td>21</td></tr><tr><td>8</td><td>28</td></tr></table>	2	7	4	14	6	21	8	28
2	7								
4	14								
6	21								
8	28								

En el Segundo Ciclo, la proporcionalidad es un tema de estudio en sí mismo, lo que implica que los alumnos deberán enfrentarse a la resolución de problemas de modo que tengan oportunidad de analizar:

- las propiedades que la caracterizan:
 - constante de proporcionalidad: al dividir dos cantidades correspondientes se obtiene siempre el mismo valor;
 - al doble de una cantidad le corresponde el doble de la otra; al triple, el triple; a la mitad, la mitad; etcétera;
 - al sumar dos cantidades de una clase se obtiene la suma de las dos cantidades correspondientes de la otra clase.
- las diferentes formas de representación de esta relación
 - tablas de valores;
 - gráficos cartesianos;

- dibujos diversos de la situación.
- los límites de este concepto, es decir, poder analizar cuándo una relación es de proporcionalidad y cuándo no lo es.

Como trabajaremos en el capítulo 3, la proporcionalidad es un concepto *unificante* que se aborda durante el estudio de contenidos de distintos ejes. En este ciclo, es posible trabajarlo, por ejemplo, durante el tratamiento de escalas; de equivalencias de tiempo, dinero, peso, capacidad, longitud; del sistema sexagesimal; de los porcentajes. Sin embargo, no es posible ni deseable que se desarrollen todos los aspectos asociados con este concepto en el mismo momento del año; proponemos, en cambio, que cuando se aborden estos contenidos se recupere lo estudiado en situaciones anteriores. De esta manera, se irá enriqueciendo el concepto de proporcionalidad, subyacente a todos ellos.

El alumno habrá construido el concepto de proporcionalidad, si puede utilizar y reconocer tanto la definición como las propiedades que caracterizan a dicho concepto. Esta expectativa es a largo plazo y, para lograrla, los alumnos han de haber tenido numerosas oportunidades de aproximarse al concepto.

Con el propósito de reflexionar acerca del trabajo sobre este concepto en las aulas de Segundo Ciclo, en este capítulo, desarrollaremos aspectos generales de su tratamiento, y luego nos centraremos en el análisis de situaciones de enseñanza, producciones de alumnos, registros de clase y secuencias de actividades.

Reflexiones acerca del tratamiento de la proporcionalidad

Recuperar problemas de multiplicación

Para poder reflexionar acerca del vínculo entre la proporcionalidad y la multiplicación, se propone la siguiente actividad.

Resuelvan individualmente el siguiente problema sin utilizar la regla de tres simple. En un almacén en el que no se hacen descuentos, 5 kilos de café valen \$30.

- ¿Cuánto valen 20 kilos de ese mismo café?
- ¿Cuánto valen 7 kilos y medio de ese mismo café? ¿Y 14 kilos?
- ¿Cuántos kilos de ese café se pueden comprar con \$75?
- En otro almacén, 6 kilos de ese mismo café valen \$34,50. ¿En cuál de los dos conviene comprar?

Variables didácticas

Ciertas características de una situación de enseñanza pueden ser modificadas por el docente y cambiar de ese modo las estrategias de resolución que utilizan los alumnos. De este modo, también cambian los conocimientos que se ponen en juego. Dichas variables se denominan **variables didácticas**.

La restricción sobre el método a utilizar para la resolución de este problema condiciona los procedimientos que se despliegan en este sentido. Se trata de una **variable didáctica**. Dado que se trata de un problema del campo multiplicativo, (es decir, que puede resolverse a través de multiplicaciones y/o divisiones), las respuestas se pueden encontrar sin dificultades.

Esta primera actividad promueve la reflexión acerca de una práctica que se encuentra muy arraigada en las aulas cuando se trabaja con proporcionalidad: la de tratarla como "tema nuevo". El problema que han resuelto es un problema a los que comúnmente se les da el nombre de "problema de regla de tres simple", y es sólo a este tipo de problemas al que está tradicionalmente asociado el concepto de proporcionalidad. Sin embargo, la proporcionalidad pertenece al campo

multiplicativo, los niños que trabajan con ella, la hacen funcionar como herramienta para la resolución de problemas, desde el momento en que interactúan con la multiplicación como suma reiterada, como puede observarse en la primera resolución del ejemplo introductorio.

¿Cómo articular, entonces, los conocimientos que los niños poseen sobre el funcionamiento de este concepto con el estudio del concepto en sí mismo?

La proporcionalidad como contenido explícito del currículum del Segundo Ciclo tiene como objetivo transformar gradualmente esta herramienta en objeto matemático, "despegarlo" de los problemas particulares a los que sirve, estudiar sus propiedades, las características que lo convierten en un **modelo** adecuado para ciertas situaciones e inadecuado para otras, y los métodos y representaciones que se utilizan en su tratamiento.

¿Qué se entiende por modelo?

Un modelo es una herramienta de análisis que recorta la realidad o el fenómeno que se quiere estudiar. Para determinarlo, es necesario seleccionar elementos de dicha realidad o de dicho fenómeno y establecer sus relaciones.

Cuando se modeliza matemáticamente una situación de otras ciencias, por ejemplo, de la Física, de las Ciencias Sociales, se debe tener en cuenta que siempre es una idealización de dicho proceso; es decir, se piensa que el proceso se comporta de acuerdo con el modelo seleccionado.

Estrategias que facilitan la resolución

Antes de avanzar en el tratamiento de la enseñanza de la proporcionalidad, recordaremos algunas cuestiones matemáticas que caracterizan a este concepto, analizando algunos de los posibles procedimientos de resolución del problema anterior.

Actividad 2.1

Les pedimos que lean nuevamente la definición y las propiedades de la proporcionalidad, que se han desarrollado en el capítulo 1, y luego respondan:

¿Cuál es la constante de proporcionalidad en el problema de la actividad de inicio?

¿Puede haber más de una respuesta a la cuestión anterior? Confronten sus respuestas.

Las variables vinculadas por una relación de proporcionalidad en el problema de inicio de esta sección son la cantidad de café (expresada en kg) y el precio del café (expresado en \$).

La constante de proporcionalidad se obtiene calculando el cociente entre los valores correspondientes de dichas cantidades, por ejemplo $30 : 5$ (que representa el precio de 1 kg de ese café) o bien $5 : 30$ (que representa la cantidad de kg de ese café que pueden comprarse con \$1).

La constante de proporcionalidad directa tiene dos valores posibles, según cuál de las cantidades esté en el lugar del dividendo y cuál en el lugar del divisor. Al decir que el valor es constante estamos asumiendo que la división la hacemos siempre en el mismo sentido.

En nuestro problema, podemos utilizar las propiedades de la proporcionalidad. Por ejemplo, para responder al ítem a:

Cantidad de café (kg)	5	20
Precio (\$)	30	120

x 4

x 4

También podríamos utilizarla si quisiéramos conocer el precio de 1 kg de café:

Cantidad de café (kg)	5	1
Precio (\$)	30	6

:5

:5

15 - 1

90 - 6

Para responder al ítem b), podríamos pensar así: si se quiere calcular el precio de 14 kg, sabiendo que el precio de 15 kg de café (triple de 5 kg) es de \$90 (triple de \$30) y el precio de 1 kg de café, que es \$6:

Cantidad de café (kg)	5	15	1	14
Precio (\$)	30	90	6	84

15 - 1

90 - 6

5 + 2,5

30 + 15

O bien, para 7 kilos y medio, sabiendo que el precio de 2 kilos y medio (la mitad de 5 kg) es de \$15 (la mitad de \$30):

Cantidad de café (kg)	5	2,5	7,5
Precio (\$)	30	15	45

5 + 2,5

30 + 15

Para dar una respuesta al ítem d) es necesario trabajar en forma simultánea con las dos relaciones. Esto implica comparar las constantes de proporcionalidad de cada relación (por ejemplo, precio que se paga por cada kilo de café):

Almacén 1

Cantidad de café (kg)	5	1
Precio (\$)	30	6

:5

:5

Almacén 2

Cantidad de café (kg)	6	1
Precio (\$)	34,50	5,75

:6

:6

O bien determinar una cantidad de café conveniente que permita hacer la comparación; por ejemplo, podría determinarse el precio de 6 kilos de café en el primer almacén:

Almacén 1

Cantidad de café (kg)	5	1	6
Precio (\$)	30	6	36

5 - 1

30 + 6

Actividad 2.2

Realicen la lectura del apartado "¿Un procedimiento? ¿Muchos? ¿Ninguno? El más económico según el caso" del libro *Enseñar y aprender Matemática, Propuestas para el segundo ciclo* de Héctor Ponce (ver el primer anexo del capítulo 2)

- a. Busquen en libros de 4º, 5º y 6º año problemas de proporcionalidad, y resuélvanlos utilizando las propiedades de la proporcionalidad directa. ¿Es siempre posible? ¿Es siempre la estrategia más económica¹²?
- b. Inventen problemas de proporcionalidad en los que la estrategia más económica sea utilizar las propiedades enunciadas arriba.

Hemos utilizado tablas de valores, puesto que son una forma de representación que favorece la identificación de las dos cantidades que se relacionan (cada fila, o columna, según se trate de una tabla vertical u horizontal, está destinada a "guardar" información de un tipo determinado). Además, la posibilidad de guardar a la vez datos "viejos" y datos "nuevos" que vamos aportando a medida que desarrollamos algún razonamiento en dirección a la resolución de la situación, favorece la identificación de las relaciones entre estos datos y por lo tanto, el estudio de regularidades (por ejemplo, las propiedades que enunciamos antes).

Es importante tener en cuenta que los niños no necesariamente conocen o están acostumbrados a trabajar con tablas de valores; consideramos que es tarea del docente intervenir todo lo que sea necesario para que comprendan cómo se leen y cómo se usan. Las tablas no deben ser un obstáculo o el centro del problema; el desafío de la situación debe estar en resolver el problema, no en la forma de registrar los datos.

Los valores que se utilizan en los problemas condicionan las estrategias a poner en juego para resolverlos. Si preguntamos por dobles, triples, mitades, etcétera, estaremos favoreciendo la utilización de las propiedades que enunciamos arriba. En cambio, si los valores que aparecen no están relacionados de manera evidente, las estrategias utilizadas para resolver podrían ser más complejas.

También debemos señalar que aún si datos e incógnitas están relacionados por dobles, triples o mitades, los niños no identificarán necesariamente estas relaciones. Si trabajamos con números no enteros, ya sea en su expresión fraccionaria o decimal, estas relaciones pueden quedar ocultas ya que, por ejemplo, no es tan claro para los niños que $1/4$ es la mitad de $1/2$. Este hecho puede hacer que los alumnos busquen otras relaciones, y por lo tanto desplieguen procedimientos diferentes. La manipulación de variables didácticas (relación entre datos e incógnitas, tipos de números involucrados, etcétera) favorece o limita los procedimientos de resolución, y por lo tanto es una poderosa herramienta para el docente a la hora de planificar y secuenciar sus clases, según cuáles sean sus objetivos.

Concepto versus método

En las páginas anteriores hemos trabajado con el concepto de proporcionalidad, a pesar de que no hemos utilizado nunca la regla de tres simple.

Existe una confusión en torno al concepto de proporcionalidad que hace que se lo identifique con la regla de tres simple. Sin embargo esta regla es un **método** que permite resolver problemas de proporcionalidad, no es la **proporcionalidad en sí**. No estamos postulando su desaparición de nuestras aulas; su utilidad está fuera de discusión. Queremos decir, una vez más, que el trabajo que proponemos se desplaza de los métodos para enfocarse en los conceptos (estudio de definiciones, propiedades, tipos de representación, tipos de problema que resuelve y límites). Se propone que la regla de tres simple, un método útil sólo en casos de proporcionalidad, sea estudiada, analizada y

¹² Llamamos económica a aquella estrategia que minimiza tiempo y esfuerzo de resolución.

articulada con las propiedades y definiciones que caracterizan a este concepto, y no como contenido aislado. Desde nuestra perspectiva, conocer la regla de tres simple implica:

- saber cuándo se puede y cuándo no se puede usar;
- saber cómo usarla;
- saber qué significa cada operación que se hace al usarla;
- saber si los valores que se obtienen al aplicarla tienen o no sentido en el contexto del problema.

Consideremos el problema:

"Si en 20 paquetes hay 100 figuritas, ¿cuántos paquetes necesito para tener 150 figuritas?"

Una resolución usual de este problema involucra un planteo como el siguiente:

$$\begin{array}{l} 100 \text{ figuritas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 20 \text{ paquetes} \\ 150 \text{ figuritas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \text{ paquetes} = \frac{20 \times 150}{100} = 30 \text{ paquetes} \end{array}$$

En principio, hemos asumido que la situación es de proporcionalidad directa, es decir, aún cuando no está dicho en el enunciado, suponemos que todos los paquetes contienen la misma cantidad de figuritas.

Para hacer los cálculos indicados podemos multiplicar primero y luego dividir. En este caso obtendríamos el resultado parcial: $20 \times 150 = 3000$. ¿Qué representa este valor en el contexto del problema? ¿Son figuritas? ¿Son paquetes? ¿Es la cantidad de figuritas por paquete?

Otra forma usual de resolver es por "reducción a la unidad":

$$\begin{array}{l} 100 \text{ figuritas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 20 \text{ paquetes} \\ 1 \text{ figurita} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x \text{ paquetes} = \frac{20 \times 1}{100} = 20/100 \text{ paquetes} \\ 150 \text{ figuritas} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 20/100 \times 150 = 30 \text{ paquetes} \end{array}$$

La respuesta final es correcta. Pero, ¿cuál es el sentido de analizar la cantidad de paquetes necesarios para tener una figurita?

Vemos así que, al igual que en el caso de los algoritmos de las operaciones, la insistencia en que los niños aprendan y utilicen únicamente este tipo de resolución posterga el sentido y el control de la situación, favoreciendo una práctica eficiente en muchos casos, pero dependiente de cuestiones como reconocimiento de enunciados tipo y memorización de una sucesión de pasos.

Consideramos que el camino debe ser inverso; debemos alentar a que las prácticas de resolución de problemas de proporcionalidad estén provistas de significado, que los niños conozcan múltiples maneras de abordarlas de forma tal que una sirva de control a otra. La regla de tres simple es sólo una más de las posibilidades. En ella se sintetizan múltiples conocimientos sobre proporcionalidad de manera hermética y ordenada.

La regla de tres simple es un algoritmo al que se llegará en virtud de síntesis; es un punto de llegada, no de partida.

El abordaje que proponemos para la enseñanza de este concepto se enmarca dentro de nuestra concepción general de enseñanza y aprendizaje de la Matemática que hemos desarrollado en el capítulo 1. Creemos, además, que ofrece ventajas frente al abordaje usual; entre otras:

- evita que resolver problemas de proporcionalidad sea una actividad mecánica para convertirse en una actividad reflexionada;
- favorece que un procedimiento de resolución sirva de control para otros, y
- permite estar en condiciones de resolver un problema aún si no se recuerda el esquema de operaciones que involucra el algoritmo convencional ("éste por éste dividido éste", recitado

clásico que acompaña el uso de la regla, que implica recordar cierta disposición de los datos y de las incógnitas dentro del planteo).

Actividad 2.3

Realicen la lectura de la página 23 del documento "El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos" de Patricia Sadovsky y Mabel Panizza (ver el segundo anexo del capítulo 2) y luego discutan las siguientes cuestiones:

- En el ejemplo del texto, Marisa utiliza un procedimiento para resolver el problema de proporcionalidad directa, y luego otro para corregirlo. Identifiquen cada uno de ellos y explíquenlos matemáticamente (en términos de definiciones y propiedades).
- ¿Qué intervención podría tener el docente (sin decir dónde está el error) para que Marisa revise su respuesta y pueda encontrar alguna incoherencia? Justifiquen por qué.

Proporcionalidad y tablas de multiplicar

Existe una estrecha relación entre el aprendizaje de las tablas de multiplicar y el trabajo sobre el concepto de proporcionalidad. En el apartado 2.2 hemos trabajado con un problema en el que 5 kg de café valían \$30. Analizamos allí que dicho problema podía resolverse utilizando las propiedades de la proporcionalidad directa. Si se pidiera completar una tabla como la siguiente (en las condiciones del problema no hay ofertas por cantidad y siempre se trata del mismo café) se podrían utilizar las propiedades ya enunciadas:

Cantidad de café (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio (\$)					30					

Un trabajo posterior de descontextualización nos permitiría trabajar en la construcción de la tabla del 6.

Para articular los resultados obtenidos a partir de este problema con la tabla de multiplicar (en este caso del 6) como objeto matemático, es necesario gestionar una puesta en común en la que se discutan los distintos procedimientos que los niños han utilizado para obtener los valores correspondientes a la situación. Algunos de ellos podrían ser:

- el precio de 10 kg será \$60, porque es dos veces \$30
- el precio de 1 kg es \$6 porque si repito 5 veces 1 kg, que serían 5 kg, tendría 5 veces \$6, que son \$30
- para 8 kg se puede hacer el doble de \$24 (precio de 4 kg), o el triple de \$12 (precio de 2 kg), o bien 8 veces \$6 (precio de 1 kg)
- si quiero saber cuánto valen x kg puedo hacer $\$6 + \$6 + \$6 = \dots \cdot 8$
- etcétera.

Será de especial interés analizar que en todos los casos se puede completar el precio multiplicando la cantidad de café por 6. También será importante que se analice el significado de esta multiplicación en el contexto del problema (por ejemplo, 8×6 quiere decir 8 veces 6, ocho paquetes de 1 kg de café, a \$6 cada kg) para no perder de vista lo que estamos calculando a través de esta cuenta. Al destacar especialmente este procedimiento, no estamos desechando los demás ni les quitamos importancia; sin embargo, estamos haciendo foco en la multiplicación por 6 y en la tabla del 6. Posteriormente el docente podría hacer referencia a estos conceptos sin referencia particular al problema, aunque con la ventaja de disponer de un trabajo previo y un registro del mismo como punto de apoyo.

Es conveniente que durante un tiempo los niños tengan acceso a los resultados que figuran en las

tablas que han construido a propósito de problemas particulares. En este sentido, dichas tablas actúan como "diccionario de consulta", y los resultados son memorizados paulatinamente, sin perderse de vista las diferentes estrategias que han servido para obtenerlos.

Actividad 2.4

Realicen la lectura de la ficha N° 4, "Las tablas de multiplicar", en **Propuestas para el aula- EGB 2**, editado por el Ministerio de Educación de la Nación, y que seguramente pueden encontrar en la Biblioteca de la escuela (ver tercer anexo del segundo capítulo) y luego respondan las siguientes cuestiones:

- a. Resuelvan la Actividad 1 que se propone en la ficha.
- b. ¿Qué conocimientos previos suponen que deberían tener los alumnos para abordarla?
- c. ¿Qué respuestas suponen que darán los alumnos a los diferentes ítems?
- d. ¿Cómo intervendrían para orientar a los niños que no pudieron plantear ninguna estrategia de resolución, dándoles una mínima cantidad de información?

A propósito de leyes no válidas

Es usual distinguir las relaciones de proporcionalidad directa de las de proporcionalidad inversa de la siguiente manera: "en las proporcionalidades directas aumentan las dos cantidades a la vez, o disminuyen las dos a la vez (a más, más; a menos, menos); en cambio, en las proporcionalidades inversas, si una cantidad aumenta, la otra disminuye".

Sin embargo, existen muchas relaciones entre cantidades que aumentan o disminuyen a la vez, pero que no lo hacen de manera proporcional. Por ejemplo:

- la edad de una persona y su estatura;
- la cantidad de cuadras recorridas en taxi y el precio que nos cobran por el viaje;
- la longitud del lado de un cuadrado y su área.

Es importante que en el Segundo Ciclo los alumnos se enfrenten con situaciones en las cuales sea necesario distinguir relaciones proporcionales y relaciones no proporcionales, no con el sólo objetivo de que identifiquen cuál es y cuál no es de proporcionalidad, sino con la finalidad de que se discutan las características que hacen que una situación pueda ser considerada como de proporcionalidad. Veamos una situación como la siguiente:

En la ciudad donde vive María, el pago del servicio de luz tiene un costo fijo de \$16, que pagan todas las casas aunque no haya consumo. Además, hay que pagar \$0,04 por cada kwh de luz consumido.

- a. Julia sabe que en este bimestre en su casa se han consumido 740 kwh. ¿Cuánto deberá abonar?
- b. María dice que si el bimestre que viene consumen la mitad, entonces van a abonar la mitad. ¿Están de acuerdo? ¿Por qué?

Si no hubiera un costo fijo, la situación sería de proporcionalidad, dado que se abonarían \$0,04 por unidad consumida. La aparición de una suma fija que hay que agregar al precio final "rompe" la proporcionalidad y hace que propiedades características de este concepto, como "al doble, el doble; a la mitad, la mitad" resulten falsas para esta situación, aún cuando sigue siendo verdadero que "cuanto más se consume, más se abona".

Actividad 2.5

- ¿Por qué se aclara en el problema de la actividad de inicio de la sección 2 que en el almacén no se hacen ofertas?
- Busquen en libros de texto enunciados en los que se dé por sentado que se trata de una relación de proporcionalidad cuando en realidad podría no serlo. Explíciten por qué.

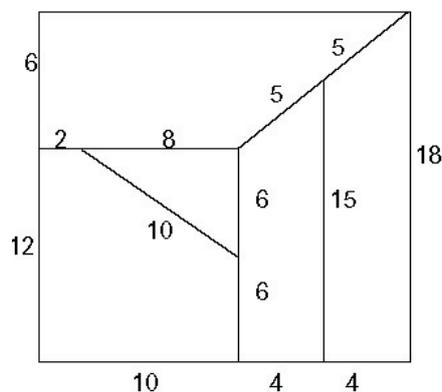
Propuestas y reflexiones acerca de la enseñanza de la proporcionalidad

Análisis de una situación de enseñanza: agrandando figuras

En la siguiente situación, que es una adaptación¹³ de la propuesta realizada por Brousseau en 1983, tal vez reconocida por la mayoría de los docentes, la proporcionalidad no es identificada a priori como el concepto adecuado para su resolución.

La clase se organiza en grupos de tres o cuatro integrantes. A cada grupo se le entrega un dibujo de un rompecabezas como el de la figura, y las piezas sueltas. Los alumnos cuentan con elementos para armar el nuevo rompecabezas.

Enunciado del problema (tal como se presenta a los alumnos):
Hay que agrandar el rompecabezas, de manera tal que el lado, que mide 4 cm, pase a medir 5 cm. Cada integrante del grupo debe ocuparse de agrandar al menos una de las piezas en forma individual. Una vez que hayan terminado deben poder armar el nuevo rompecabezas.



¹³ Extraída de Ponce, H., *Enseñar y aprender Matemática*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 2004.

La situación del rompecabezas favorece la aparición de diversos procedimientos de cálculo, tanto dentro de un mismo grupo como entre grupos diferentes. Esto se debe a que cada niño se encarga de la ampliación de una pieza. Si el nuevo rompecabezas no se arma, todo el grupo deberá revisar las estrategias de cálculo y de construcción de cada integrante, y determinar si una o varias son erróneas. De esta manera, luego de una etapa de acción, en la que los niños utilizan métodos y herramientas, deberán explicitarlas para comunicarlas a sus compañeros, discutir las y estudiar su validez.

El docente debería evitar tomar partido en las discusiones, para no dar pistas acerca de la resolución. No estamos diciendo que no debe intervenir en absoluto; si la situación está bloqueada, es su responsabilidad intervenir para hacer una devolución del problema con información que permita a los alumnos pensar en una posible estrategia de resolución. Sin embargo, no debe resolverles el problema.

En la instancia de puesta en común cada grupo dará a conocer al resto de la clase el procedimiento que ha utilizado para resolver. Si el rompecabezas no se ha formado, habrá que analizar cuáles son las razones por las que ello ha ocurrido; en cambio, si se formó el rompecabezas, los niños deberían explicitar sus procedimientos y justificar las razones de su validez. Notemos, entonces, que en ambos casos, el trabajo de discusión es fértil para explorar el concepto que se aborda. En esta instancia el docente tiene un rol fundamental porque es quien sostiene y orienta la discusión mediante sus intervenciones.

La situación del rompecabezas es de proporcionalidad, dado que si queremos que las nuevas figuras sean una ampliación de las originales, estamos buscando que sean semejantes, es decir, que los lados de la nueva figura mantengan la misma relación que tenían, entre sí, los lados de la figura original. Podemos resolverla a partir del cálculo de la transformación correspondiente a un segmento de 1 cm de longitud, o bien la constante de proporcionalidad.

El planteo de situaciones como la del rompecabezas, que involucran tanto el marco aritmético como el geométrico, aporta un enriquecimiento no sólo porque amplía el espectro de problemas que pueden ser abordados a partir del concepto de proporcionalidad, sino también por sus características propias.

Validación

Las estrategias que utilizan los alumnos para la resolución de problemas, así como las afirmaciones que formulan en torno a ellas, están implícitamente acompañadas por un supuesto de validez. La **validación** es la instancia en la que este supuesto se pone a prueba.

Notemos, por ejemplo, que una primera validación proviene de la situación misma: el nuevo rompecabezas se ensambla o no se ensambla, hecho que condiciona el estudio posterior acerca de las razones por las que esto ha ocurrido.

La manipulación de los valores del enunciado condiciona los procedimientos de resolución, favoreciendo o limitando la aparición de modelos implícitos (correctos o erróneos). Por ejemplo, si la transformación fuera al doble (de 4 cm a 8 cm) seguramente los alumnos duplicarían todos los lados y el rompecabezas ampliado se ensamblaría sin dificultad. Podríamos pensar en que han utilizado un modelo multiplicativo y por lo tanto han reconocido a la proporcionalidad como el modelo pertinente; sin embargo, esto no necesariamente es así. Los alumnos suelen responder utilizando modelos aditivos (la duplicación puede explicarse con este modelo, ya que $8\text{ cm} = 4\text{ cm} + 4\text{ cm}$); es común que en la transformación de 4 cm a 5 cm piensen que deben sumar 1 cm a todas las dimensiones. Ante su asombro, cuando construyen las piezas, el rompecabezas no se vuelve a formar. La utilización de este modelo erróneo posibilita que se lo cuestione explícitamente y que se avance en la búsqueda del modelo adecuado.

Notemos que la manipulación del factor de ampliación (que es la constante de proporcionalidad) es fundamental para favorecer la aparición de ciertos modelos implícitos. En este caso, al ser un valor no entero ($5/4$ o bien 1,25), la tarea es más compleja.

Los alumnos deben reconocer que necesitan encontrar la transformación correspondiente a un segmento de 1 cm para responder; de allí en más, pueden multiplicar este valor por cualquier número y hallar la transformación que se pide. Veámoslo en una tabla de valores:

	: 4		. 7	
Medida original (cm)	4	1	2	7
Medida ampliada (cm)	4	1.25 (ó 5/4)	2.5 (ó 5/2)	8.75 (ó 35/4)
	: 4		. 7	

Pueden utilizarse expresiones decimales o fraccionarias, dependiendo de los conocimientos previos que posean los alumnos, de ciertas condiciones sobre el trabajo (por ejemplo, si se puede o no utilizar calculadora para resolver) y de la finalidad de la clase.

Una vez resuelto el problema y luego de la discusión colectiva, se hace un resumen de lo aprendido, se subrayan las conclusiones a las que se ha arribado y se registran (en afiches y/o en el cuaderno) para futuras referencias. Esta instancia de **institucionalización**, que caracterizamos en el Capítulo 1, es de suma importancia, ya que los alumnos deben estar en condiciones de identificar el saber para poder utilizarlo en nuevos problemas. Esta etapa de la clase está a cargo del docente, puesto que es él quien ha planificado la actividad y conoce los objetivos perseguidos a partir de su resolución.

A continuación podrían plantearse otras situaciones, no con la intención de que se construya nuevamente otro rompecabezas, sino para reinvertir lo estudiado respecto del modelo subyacente a la transformación. Por ejemplo:

- Trabajar con rompecabezas hipotéticos, cambiando las medidas. "¿Cómo transformar las medidas de los lados de las figuras de un rompecabezas, si la regla de transformación indica que el lado de 9 cm debe pasar a medir 11 cm?"
- Analizar que en los problemas anteriores se ha trabajado siempre con lados de medidas enteras, tanto en el rompecabezas original como en el ampliado, y que esto ha llevado a multiplicar un número entero por un número no entero. Puede preguntarse en qué casos se verían en la necesidad de multiplicar dos números no enteros. Puede a su vez presentarse una situación de rompecabezas hipotética, con datos como los siguientes:

Medida original (cm)	3	1	5	5/7
Medida ampliada (cm)	4			

Esta serie de problemas podría constituir una secuencia: se parte de una situación en la cual se despliegan procedimientos, se validan, se analiza el modelo adecuado, y en las situaciones sucesivas se reinvierte lo estudiado cambiando las condiciones del problema para explorar nuevas características.

Actividad 2.7

Resuelvan las dos situaciones anteriores y respondan:

- ¿Qué finalidad tiene la primera situación? ¿En qué se diferencia respecto de la de armar el rompecabezas? Respondan en términos del problema en sí, de la acción que deberán llevar a cabo los alumnos y de la validación de las respuestas.
- ¿Cómo podría intervenir el docente si los niños no pueden comenzar a resolver?

La proporcionalidad en un aula de sexto año: análisis de un registro de clase

Analizaremos ahora un registro de clase de sexto año, que se incluye en el cuarto anexo del segundo capítulo. El problema sobre el que se trabaja tiene el siguiente enunciado:

Si una barra de cereales de 22 g contiene 3,5 g de materia grasa, ¿cuánta materia grasa contiene una barra del mismo cereal, de 40 g?

Por ser un problema típico, usualmente esperaríamos que los alumnos lo resolvieran utilizando la regla de tres simple. Sin embargo, no todos los niños de esta clase conocían esta regla y debieron

movilizar otros conocimientos para responder.

En función de la finalidad del docente, la clase se organizó en varias etapas:

1. trabajo individual;
2. los niños se juntaron en grupos de 3 ó 4 integrantes para discutir las respuestas que habían dado al problema y acordar cuál de ellas sería expuesta como solución del grupo en la puesta en común;
3. puesta en común en la que cada grupo expuso a toda la clase su solución, dio argumentos para convencer a los demás acerca de la validez de la misma y se debatió cada propuesta;
4. con el apoyo del docente, se identificaron las cuestiones que se aprendieron a través del problema. (en el registro sólo figuran las etapas 3º y 4º).

Actividad 2.8

Antes de leer el registro, les solicitamos que respondan las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué procedimientos pudieron haber desplegado los niños para resolver?
- b. ¿Qué errores pudieron haber aparecido en dichos procedimientos?
- c. ¿Por qué suponen que la clase se organizó con un momento de trabajo individual, otro grupal y finalmente con un momento de trabajo colectivo?

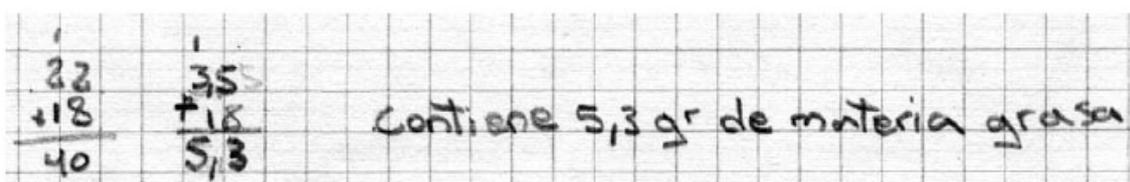
El registro que presentamos corresponde a un curso en el cual los alumnos están acostumbrados al tipo de trabajo matemático que sostenemos en este enfoque.

El proyecto de enseñanza de la maestra se basa en el supuesto de que para aprender matemática hay que "hacer matemática", y esto implica producir, comunicar y validar los conocimientos.

Los alumnos y la resolución de problemas

"El tipo de funcionamiento de los alumnos en la resolución de un problema no depende sólo de las características de éste y de los conocimientos que tengan disponibles en el momento de encarar la resolución, sino también del tipo de trabajo al que estén acostumbrados. Ningún problema, por sí solo, puede producir grandes cambios en el tipo de funcionamiento de una clase", Carmen Sessa, 1998.

Acerca de los procedimientos



Este parece ser el procedimiento menos avanzado ya que los valores del enunciado se han utilizado en sumas y restas para dar una respuesta. Notemos, sin embargo, que a pesar de las fallas evidentes en las cuentas, las alumnas han dado una respuesta que tiene coherencia en el contexto en el que se estaba trabajando. La maestra no indaga en este sentido y nos queda la pregunta de si el resultado sólo se debió a un error por omisión de la posicionalidad del sistema decimal de numeración en el algoritmo de la suma, o si las chicas controlaron los valores dando una respuesta en función de lo que se les preguntaba.

El procedimiento del G4, por el contrario, podría considerarse el más avanzado puesto que aparentemente reconocen el modelo de proporcionalidad y aplican una regla válida dentro de este modelo.

$$\begin{array}{r}
 22 \text{ g} \text{ --- } 3,5 \text{ g} \\
 40 \text{ g} \text{ --- } x = \frac{40 \cdot 3,5}{22} = \frac{1400}{22} = 63
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 40 \\
 3,5 \\
 \hline
 200 \\
 20 \text{ ---} \\
 \hline
 400
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1400 \mid 22 \\
 080 \\
 \hline
 14 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

A pesar de ello, el haberse olvidado la coma en un cálculo y no haber reparado en las consecuencias de dicho olvido en la respuesta al problema no es menor. Las alumnas dan una respuesta que no tiene ningún sentido en el contexto del problema y sólo lo advierten cuando un compañero les hace notar la contradicción con los datos del enunciado (recordemos que las alumnas tuvieron dos instancias para revisar su propuesta: una individual y otra grupal, y aparentemente, en ninguna de ellas advirtieron esta cuestión).

El error cometido por el G5, también un error de cálculo, no tiene influencia sobre la pertinencia del resultado y por ello podemos considerar que no tiene la relevancia del error de G4.

PLANTEO	SOLUCION
$ \begin{array}{r} 22 \text{ g} \text{ --- } 3,5 \text{ g} \\ 40 \text{ g} \text{ --- } x = \frac{40 \cdot 3,5}{22} \end{array} $	$ \begin{array}{r} 40 \\ \times 3,5 \\ \hline 200 \\ 170 \text{ ---} \\ \hline 140,0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1400 \mid 22 \\ 080 \\ \hline 00 \end{array} $
RTA = cantidad de gramos en la barra $\frac{63}{6}$	

A partir del análisis del debate posterior y de los escasos argumentos que aportan estos niños para fundamentar la utilización de esta regla, nos podemos preguntar si realmente reconocen el modelo de proporcionalidad; nos da la impresión de que sólo reconocen el tipo de enunciado al que aprendieron a responder con la regla de tres simple. El G1 presentó el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{r}
 22 \text{ g} \text{ --- } 3,5 \text{ g} \quad 40 \text{ g} \text{ --- } 6,35 \\
 22 \text{ g} \\
 3,5 \\
 \times 18 \\
 \hline
 285 \\
 35 \\
 \hline
 6,35
 \end{array}$$

Las integrantes de este grupo no pueden fundamentar su estrategia más que diciendo "nos pareció que era así". También aquí es interesante observar que el error en el cálculo parece ajustarse a cierta expectativa de las alumnas respecto a la respuesta del problema.

El G3 muestra un tipo de respuesta reflexionada que, si bien no es correcta, transcurre por las vías

que permitirán al debate orientarse en dirección al estudio de la situación.

¿Cuánta materia grasa contiene una barra del mismo cereal, de 40 gr? 6,0, le descoste porq' yo pienso que le tengo q' bajar los dos \$ porq' $22+22=44$ y a cuarente no llega entonces le descoste dos \$ y me quedó 6,0.

Acerca de la puesta en común

No haremos aquí un análisis exhaustivo de discusiones y diálogos que se muestran en el registro; queremos utilizarlo para destacar aspectos que nos parecen importantes para el tipo de trabajo que estamos proponiendo.

La decisión de dividir el trabajo inicial en una etapa individual y una grupal favorece la aparición de diversidad de procedimientos y la posterior necesidad de llegar a acuerdos para proponer una solución que represente a todos los miembros del grupo. En la etapa colectiva el docente promueve que se expliciten los procedimientos y se expongan los argumentos que los justifiquen; sin embargo, no emite juicio sobre lo realizado. Una vez que todos los grupos han dado a conocer sus propuestas, se propone el debate sobre las estrategias que aparecieron.

La aparición de dibujos de barras de cereal por parte de los integrantes del grupo 3 es sin duda un elemento que ha favorecido el avance de la discusión.

"Federico: Para mí es 6 coma 0, porque si fueran dos barritas de 22 habría 7 gramos de materia grasa...

Tomás: No entiendo.

Federico: ¡Claro! Si tenés una barrita de 22 gramos de cereal, tiene 3,5 de materia grasa; si tenés dos barritas de 22 gramos, hay 3,5 en una y 3,5 en la otra, o sea que hay 7 en total. Si vos le sacás el papel a las barritas y las pegás, tenés una barra más larga de 44 con 7 gramos de grasa (se levanta y dibuja en el pizarrón)



Tomás: Sí, pero vos dijiste que da 6, no 7...

Federico: Porque eso es para una de 44. Pero como es de 40 es un poco menos (borra un pedacito del dibujo que había hecho)



Para mí hay que sacarle el "coma 5" de la barra de 22 gramos, entonces sería 3 más 3. Por eso da 6."

La posibilidad de utilizar dibujos se ve propiciada por el contexto del problema. Consideremos qué hubiera ocurrido si el enunciado hubiera sido: "Si 22 litros de agua contienen 3,5 gr de minerales, ¿cuánto mineral contienen 40 litros de la misma agua?". Los valores son los mismos, el resultado que esperamos es el mismo, y sin embargo el hecho de que no tratemos con barritas sino con líquido puede dificultar la idea del dibujo como primera representación de la situación y por lo tanto, primera aproximación a una respuesta posible.

No se trata de que todos los problemas que proponamos de ahora en adelante involucren magnitudes discretas¹⁴ para que sean más sencillos; tampoco se trata de que refieran siempre a contextos conocidos por el alumno. Con estas reflexiones buscamos poner de relieve nuevamente la existencia de variables que podemos manipular en los problemas para favorecer la aparición de ciertos procedimientos, y luego hacerlos evolucionar a partir del planteo de otras situaciones que evoquen el trabajo previo, lo revisen, exploren nuevas características del concepto y lo enriquezcan. En este sentido, la idea de **secuenciación** de los problemas es de gran importancia dentro de nuestra propuesta. Volveremos sobre este punto en la sección siguiente.

El registro de las producciones está al servicio de que el docente no otorgue la palabra a cualquiera

en el momento de la puesta en común. No sólo aporta un mejor ordenamiento de la clase sino que posibilita la selección del orden en que serán discutidas las propuestas.

Actividad 2.9

Lean el registro que se presenta en el cuarto anexo y respondan:

- ¿Qué objetivos suponen que tenía la maestra al planificar la clase?
- ¿Qué lugar ocupa la regla de tres simple en esta clase?

En esta clase no se cuestiona la utilización de la regla de tres simple, pero tampoco se tiene como objetivo estudiarla. En este sentido, la maestra sólo trata de que se expliciten los razonamientos que han llevado a los alumnos al aplicar dicha regla. El acento en un principio está puesto en que controlen el resultado que obtuvieron y que estimen si es un resultado posible.

El uso de la calculadora tampoco está cuestionado, dado que en este problema no es deseable que las cuentas obstaculicen la resolución¹⁴. Los errores asociados a la posicionalidad y a los algoritmos de multiplicación y división podrán ser abordados en otro momento; de esta manera no se ha desviado la finalidad del problema. Se observan en esta clase intervenciones de diverso tipo; por ejemplo:

- que apuntan a dar información acerca de alguna cuestión que se está discutiendo;
- que buscan que los alumnos expliciten sus ideas;
- que tienden a que los alumnos mejoren sus argumentaciones;
- que favorecen la circulación de las ideas;
- que apuntan a institucionalizar algo nuevo;
- que tienden a resaltar algún aspecto, duda o conclusión;
- que promueven que los alumnos validen respuestas por sus propios medios;
- que relanzan el problema alterando alguna variable;
- que sostienen la incertidumbre acerca de cuál es la respuesta al problema;
- que ponen en duda las producciones (correctas e incorrectas);
- que tienden a evocar una situación, idea o conocimiento.

¹⁴ Distinguimos aquí dos tipos de magnitudes: discretas y continuas. Para asignar un número que indique la cantidad correspondiente a una magnitud discreta, es posible contar (figuritas, alfajores, etcétera); en el caso de las magnitudes continuas, es necesario medir (tiempo, capacidad, peso, etcétera).

¹⁵ Si bien los niños han hecho las cuentas "a mano", se los alienta durante la discusión a que utilicen la calculadora para resolver cálculos "difíciles".

Actividad 2.10

- Releven en el registro algunas de las intervenciones que se nombran arriba.
- ¿Qué suponen que se buscó con las intervenciones del siguiente extracto?

*“Docente: ¿Alguien se acuerda cómo fue que pudimos responder?
Tomás: Nosotros y otro grupo ya habíamos respondido bien. Bah, nosotros nos equivocamos en una cuenta, pero después la corregimos y estaba bien.
Docente: ¿Y cómo sabían que era correcta su respuesta?
Tomás: Porque había que usar la regla de tres simple.
Valentín: Pero yo no la usé a esa regla... al final no la explicaste (a la docente).
Docente: Hoy vamos a estudiarla un poquito. Pero vos decís que no la usaste... ¿cómo hiciste entonces para resolver, si Tomás dice que había que usar esa regla?
Valentín: Yo lo pensé distinto.”*

- ¿Por qué la maestra no explica la regla de tres simple cuando Valentín se lo señala?
- Ante la fundamentación de Tomás, la maestra no emite juicio; ¿por qué?

Las intervenciones del docente en la etapa de la puesta en común son de gran importancia. A través de ellas se puede sostener y orientar el debate en dirección a los objetivos de la clase, enriquecer la discusión y favorecer la democratización de los conocimientos.

Observemos que en las clases del registro, la maestra hace una selección de aquellas cuestiones que se han expuesto en la fase colectiva y las anota en el pizarrón. Además utiliza dibujos y tablas de valores para poner de relieve las relaciones entre los cálculos que se van haciendo (es decir, los procedimientos numéricos) y los razonamientos más espontáneos, ligados a lo extraescolar.

También debemos destacar que en la primera clase el debate no concluye ni se lo fuerza a concluir. El problema queda abierto y se sostiene la incertidumbre hasta la clase siguiente. La maestra utiliza esta ausencia de conclusiones cuando pide a los alumnos que relaten lo estudiado, movilizándolo de esta manera los conocimientos utilizados para resolver y los que han circulado durante la discusión. Pueden notarse en esta segunda clase tres momentos importantes:

- *evocación* de lo estudiado en la clase anterior, relatado por algunos alumnos y orientado por la maestra;
- *institucionalización* de lo aprendido: de toda la información aportada, la maestra selecciona y define cuestiones relacionadas con el saber al que se apunta;
- *estudio de nuevos problemas*, para reinvertir lo aprendido y para establecer sus límites.

La evocación en la clase del registro está a cargo de los alumnos; la maestra interviene orientándola hacia lo que luego será institucionalizado. Para los niños que habían podido plantear algún procedimiento, es una oportunidad para volver sobre los conceptos desde una perspectiva diferente ya que deben reflexionar sobre sus acciones sin realizarlas. Para los niños que no habían podido plantear ningún procedimiento, ésta es una nueva oportunidad de acercarse al problema.

En la última etapa de la evocación, la maestra decide anotar “las cosas importantes que se están diciendo” y hace una selección que se apoya en el saber al que apuntaba la primera clase. Las conclusiones surgen del trabajo realizado por los alumnos y las escribe en el lenguaje que han utilizado los niños, introduciendo términos formales cuando es necesario. Observemos que se utilizan tres formas diferentes de registrar lo que se va diciendo en el relato: tablas de valores, dibujos y oraciones en lenguaje coloquial. Esta multiplicidad también es una forma de democratización del conocimiento: al hacer circular en clase varias maneras de representar lo elaborado en la resolución del problema, se favorece no sólo la identificación de regularidades, el control de una forma de pensar en función de otra, sino también que más niños tengan acceso al problema y a las diversas posibilidades de pensar en sus características.

Es interesante destacar que las conclusiones se refieren al problema estudiado, es decir, no se están sacando conclusiones generales aún; esta tarea puede quedar reservada para alguna clase posterior, cuando los alumnos hayan tenido oportunidad de resolver otros problemas que les permitan identificar las observaciones como características de toda una colección de situaciones y no de una en particular, es decir, comenzar a **descontextualizar** los conocimientos en juego. En este sentido, este problema será una referencia, como comentamos en el Capítulo 1.

También queda reservado para clases posteriores el énfasis que puede poner el docente para mostrar la economía de un procedimiento frente a otros en determinadas circunstancias. Analicemos la propuesta de la segunda clase. Los problemas, tal como se les presentaron a los alumnos, fueron:

1. En un almacén, 5 kg de café valen \$30.
 - a. ¿Cuánto valen 20 kg de ese mismo café?
 - b. ¿Cuánto valen 14 kg de ese mismo café? ¿Y 37 kg?
 - c. ¿Cuántos kg de ese café puedo comprar con \$45?

2. Jorge tiene 6 años y pesa 25 kg. ¿Cuánto pesará cuando tenga 60 años?

3. Un chico tiene \$60 ahorrados. Quiere hacer algunos cálculos para saber cuánta plata puede gastar por día en sus vacaciones. Él pensó que si se va 10 días, suponiendo que todos los días gasta la misma cantidad, puede gastar \$6 cada día. ¿Cuánto dinero por día podría gastar si se fuera 5 días?

4. Sofía gana \$14 cada dos días que ayuda a su abuelo en la tienda. ¿Cuánto dinero ganó en total si trabajó 10 días?

5. Marcelo mide 90 cm, el doble que Joaquín. ¿Cuánto medirá Marcelo cuando Joaquín mida 135 cm?

6. Un auto que se mueve siempre a la misma velocidad recorre 180 km en 1 hora y media. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 90 km?

Actividad 2.11

- a. Resuelvan los problemas que se proponen.
- b. ¿Con qué finalidad se propone en este momento el análisis de problemas de proporcionalidad y otros que no son de proporcionalidad?
- c. ¿Qué respuesta podrían dar los alumnos en cada caso?
- d. Reflexione acerca de los valores que aparecen en los enunciados de las situaciones 2, 5 y 6. ¿Por qué supone que se han elegido esos valores? Piense en valores que no servirían para generar lo que se está buscando con éstos.
- e. ¿Qué errores podrían aparecer en las producciones? ¿Qué intervenciones harían en esos casos para que los alumnos revisen su propuesta sin darles la respuesta que ustedes esperan?

Es probable que los alumnos respondan al primer problema suponiendo que se trata de una situación de proporcionalidad. Muchos seguramente resolverán basándose en el estudio del problema anterior. Este es un momento adecuado para discutir las condiciones que habilitan la utilización del modelo proporcional. No se trata de corregir las respuestas anulando la posibilidad de utilizar las conclusiones del primer problema. Por el contrario, aquellos alumnos que resuelvan de esta manera deberán asumir la necesidad de ciertas condiciones: en este caso, debería aclararse si el

negocio hace o no promociones por comprar al por mayor. Así, la respuesta utilizando el modelo proporcional será válida sólo en caso de que no se hagan ofertas.

El segundo problema es una de las situaciones a las que hemos hecho referencia anteriormente en las que se cumple "a más, más" y sin embargo no pueden modelizarse a través de la proporcionalidad. En este caso, si utilizáramos dicho modelo, resultaría que a los 60 años Jorge pesaría 250 kilos. La discusión sobre la posibilidad o no de este estado final, pero sobre todo del ritmo constante de aumento de peso a lo largo del transcurso de la vida del protagonista del problema, será fundamental para establecer un límite al modelo.

El tercer problema corresponde a una situación de proporcionalidad inversa: si el chico se va de vacaciones la mitad de días, dispone del doble de dinero para gastar por día. Podría ser un momento adecuado para plantear una discusión similar a la del problema de la barra de cereal. Por ejemplo, si se utilizaran tablas de valores, podrían analizarse más situaciones hipotéticas:

Cantidad de días	10	5	20	30	1
Dinero por día	6	12	3	2	60

A partir del estudio de esta nueva situación utilizando formas de razonamiento similares a la anterior, se retoman las conclusiones formuladas antes desde una nueva perspectiva: comparación, establecimiento de semejanzas y diferencias. Por ejemplo, podría analizarse la validez en este caso de las propiedades identificadas en el problema del cereal, observarse que existe una relación entre dobles y mitades, triples y tercios, etcétera. También, cuando se estudie la constante de proporcionalidad, se podría señalar que en esta situación el valor constante proviene de la multiplicación de los valores correspondientes (en este problema: $10 \times 6 = 60$; $5 \times 12 = 60$; $20 \times 3 = 60$; $30 \times 2 = 60$; $1 \times 60 = 60$, que representa la cantidad total de dinero que tiene ahorrado el chico) mientras que en la proporcionalidad directa provenía de la división de valores correspondientes.

En el cuarto problema, el modelo de proporcionalidad puede utilizarse, aunque también se podría discutir qué ocurre en caso de que Sofía trabajara un número impar de días.

El quinto problema es de características similares al segundo; sin embargo, el orden en el que aparece la información en el enunciado lo convierte en un problema algo más complejo que aquél.

El último problema cumple con todas las condiciones como para que se utilice el modelo de proporcionalidad.

Actividad 2.12

- a. ¿Qué institucionalización harían después de la resolución y discusión de los problemas anteriores? Redacten conclusiones tal como podrían quedar registradas en el cuaderno.
- b. Piensen cómo podría planificar la maestra del registro una clase en la que se estudie la constante de proporcionalidad, utilizando algunos de los problemas que los niños ya han resuelto.
- c. Piensen en la institucionalización que podría hacer la maestra del registro una vez estudiada la constante de proporcionalidad.

Secuenciación de los problemas

Consideraciones generales

Existen variables presentes en los problemas que generan dificultades en mayor o menor grado

al momento de su resolución; por ejemplo, el tipo de números, el tipo de magnitudes, la forma de presentar y organizar la información, el tipo de pregunta que se hace, el tipo de acción que se propicia, los datos que se dan, etcétera. En las secciones anteriores tuvimos oportunidad de señalar diferencias entre problemas que son equivalentes desde el punto de vista matemático, pero que sin embargo no lo son desde el punto de vista de los niños:

- en el problema del café, los niños no resolverían de la misma manera con números enteros que con expresiones fraccionarias;
- en el problema del rompecabezas, no resuelven igual si la transformación es de 4 cm a 8 cm que si es de 4 cm a 5 cm;
- en el problema de las barras de cereal, no es lo mismo hablar de barritas que hablar de agua;
- en el problema de la estatura de los dos chicos, la información está presentada de manera "desordenada" con respecto a la pregunta que se hace; además, parece faltar uno de los datos (no hay información numérica sobre la estatura de Joaquín).

El docente puede manipular estas variables para favorecer la exploración de cuestiones diversas sobre problemas que involucren un mismo concepto; de esta manera, puede **secuenciar** los problemas.

Secuenciar implica que al avanzar en el estudio de un concepto iremos complejizando las situaciones, no en el sentido de que por ser más difíciles, al resolverlas, los niños mostrarán que "saben más". La secuenciación posibilita la reinversión de lo aprendido en otros contextos, la evolución de los procedimientos a formas más elaboradas, la selección de la forma más económica para resolver, según el caso.

El hecho de que se den muchas oportunidades a los alumnos de visitar el mismo concepto con situaciones diversas en las que se ha variado alguna condición, lo enriquece a la vez que posibilita que más niños accedan a él. Además, haber explorado en problemas más "sencillos" distintas formas de resolución permite que frente a situaciones más complejas los niños puedan volver provisoriamente a procedimientos menos eficientes y no perder el control de la situación.

Actividad 2.13

En secciones anteriores se analizó el problema del rompecabezas y se propuso una secuencia de trabajo.

- a. ¿Cuáles son las variables que se han manipulado con respecto a la primera situación para que constituya una secuencia?
- b. Inserten en esta secuencia un problema en el que se pida una reducción en lugar de una ampliación. ¿Qué valores propondrían? ¿Cómo influye esta elección en el lugar elegido para insertar el problema?

Análisis de un ejemplo referido a la noción de porcentaje

Cuando calculamos un porcentaje estamos ante una situación de proporcionalidad cuya constante es una fracción de denominador 100; así, en el cálculo del 10 %, la constante es 10/100; para el 20 %, es 20/100; etcétera.

Actividad 2.14

Resuelvan el siguiente problema, y luego analicen lo que se pide a continuación:

Que nos hagan 10% de descuento significa que por cada \$100 que gastemos nos van a descontar \$10. Completen la siguiente tabla de descuentos:

Si gastamos	\$100	\$200	\$300	
Nos descuentan	\$10			\$50

- ¿Por qué suponen que se utilizaron múltiplos de 100 y de 10 en este problema?
¿Qué procedimientos de resolución se busca favorecer? ¿Qué valores menores a \$100 se podrían agregar a la tabla anterior sin alterar la finalidad del problema?
¿Qué conclusiones podrían obtenerse del trabajo con esta tabla, que sirvieran de apoyo para extender y enriquecer el concepto?
- Supongan que este problema es el primero en una secuencia de porcentaje.
¿Qué problemas podrían proponer a continuación para extender el estudio a otros porcentajes "redondos" o "sencillos", por ejemplo 20%, 30%, 5%, 70%, etcétera? ¿Qué conclusiones esperarían obtener que les sirvieran de apoyo para un trabajo posterior más general? (Consideren el trabajo con las propiedades de la proporcionalidad pero también con la constante de proporcionalidad, tanto en su expresión fraccionaria como decimal (diferencien cómo trabajarían en cada caso y expliquen por qué))
- ¿Qué problemas propondrían para trabajar con porcentajes no tan sencillos, por ejemplo 35%, 65%, etcétera? ¿Y para generalizar a cualquier porcentaje entero menor que 100?
- ¿En qué lugar de la secuencia insertarían porcentajes como 50%, 25%, 75%?
¿Cómo? ¿Por qué?
- ¿En qué lugar de la secuencia insertarían porcentajes mayores o iguales a 100?
¿Cómo?

Para el cálculo de porcentaje se suele utilizar un algoritmo; por ejemplo, para calcular el 15% de 40 se multiplica 15×40 y luego se divide el resultado por 100. Este algoritmo proviene de la aplicación de la regla de tres simple directa:

$$\begin{array}{l} 100 \% \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 40 \\ 15 \% \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad x = \frac{40 \times 15}{100} \end{array}$$

Este procedimiento es válido, ya que se trata de una situación de proporcionalidad.

Pero es justamente este hecho el que propicia que las situaciones de porcentaje puedan ser analizadas a la luz de la definición y las propiedades estudiadas anteriormente, y no centrar el estudio en la aplicación de un algoritmo. Es decir, podemos recuperar lo estudiado con anterioridad en lugar de enseñar un mecanismo aislado. Esto es lo que se ha buscado con el problema presentado en la actividad anterior, y es a lo que hemos apuntado con las preguntas de dicha actividad.

Actividad 2.15

En el Capítulo 1 se propusieron diferentes problemas que involucran la noción de porcentaje. En ese momento, se les pidió que elaboraran secuencias para trabajar esta noción a lo largo del 2° Ciclo, identificando los problemas correspondientes a cada año.

1. Realicen una relectura del apartado “El tiempo y la construcción de las nociones a aprender” en el capítulo 1 del presente documento.
2. Revisen las secuencias elaboradas por ustedes en aquel momento a la luz de lo discutido en este capítulo. Para ello:
 - a. Resuelvan todos los problemas de alguna de las secuencias elaboradas por ustedes. Anticipen distintas estrategias que podrían utilizar los alumnos para resolver.
 - b. ¿Modificarían los criterios que utilizaron para construir dicha secuencia? ¿Por qué?
 - c. ¿Qué variables han manipulado para que constituya una secuencia?
 - d. ¿Qué diferencias existen entre los distintos problemas de la secuencia? (Consideren aspectos como: necesidad de resolver en grupo o individualmente, procedimientos de resolución que propicia o limita cada problema, conocimientos previos necesarios para abordarlos, errores que podrían cometer los alumnos al resolver cada uno, intervenciones que deberían prever, etcétera)
 - e. ¿En qué sentido algunos problemas constituyen un apoyo para los siguientes? ¿Qué conclusiones esperarían obtener en el estudio de los primeros problemas de manera que puedan servir de apoyo para los siguientes?
 - f. Modifiquen la secuencia si es necesario, y expliciten los nuevos criterios utilizados.

A modo de cierre

En este capítulo, y a partir de los análisis y las reflexiones centradas en el aprendizaje y la enseñanza de la proporcionalidad en el Segundo Ciclo, hemos querido destacar una idea central en nuestra propuesta: que los conocimientos que construyen los niños con respecto al concepto de proporcionalidad son **provisorios, revisables, mejorables**, puesto que su construcción se basa en el estudio progresivo de aspectos parciales de este concepto tan complejo.

Desde nuestra perspectiva, debemos renunciar a la idea de enseñar desde el principio todos los aspectos posibles y optar, en cambio, por una reorganización de los conocimientos a medida que proponemos problemas que hacen énfasis en uno u otro.

Bibliografía

- Berté, A., *Matemática dinámica*. Buenos Aires, AZ, 1993.
- Broitman, C., *La enseñanza de las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 1999.
- DGCyE, *Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires*. La Plata, DGCyE, 2001.
- DGCyE, Programa de Evaluación de la Calidad, Documentos definitivos, La Plata, 2004.
- DEGB, *Aportes para el fortalecimiento de la enseñanza de la Matemática en la EGB*. La Plata, DGCyE, 2004.
- DEPB, Documento 3, *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB*, Gabinete pedagógico curricular, La Plata, DGCyE 2001.
- Secretaría de Educación del GCBA, Documento curricular 4, Dirección de Currículum, Buenos Aires, MCBA, 1997.
- Ministerio de Educación de la Nación, *Propuestas para el aula, Material para docentes*, Programa de innovaciones educativas, 2000.
- Napp; Novembre; Sadovsky y Sessa, *Estudiar Matemática*, s/f.
- Panizza, M. y Sadovsky, P., *El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos*, Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales (Flacso)-Ministerio de la Provincia de Santa Fe.
- Ponce, H., *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el segundo ciclo*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 2004.
- Vergnaud, *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de las matemáticas en la escuela*. México, Trillas, 1991.

3

Vínculos entre la proporcionalidad y diferentes contenidos del área

La resolución de problemas que presentan relaciones de proporcionalidad atraviesa, en forma implícita o explícita, gran parte de los años de la escolaridad básica, lo que permite relacionar conocimientos de diferente naturaleza. Estas relaciones pueden considerarse pertenecientes al campo conceptual de las **estructuras multiplicativas**, lo que hace pertinente incluir su tratamiento cuando se aborda el estudio de las **operaciones aritméticas**.

En este sentido, Gerard Vergnaud (1996), especialista en didáctica de la matemática, define un **campo conceptual** como "un espacio de situaciones-problemas cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos, pero en estrecha relación". En el campo de las denominadas **estructuras multiplicativas** se incluyen situaciones cuya resolución requiere de una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Es decir, situaciones vinculadas con los siguientes conceptos: proporción simple y compuesta, función lineal y multilineal, razones, producto y cociente de dimensiones, múltiplo, divisor, fracción, número racional, entre otras. La importancia de vincular nociones pertenecientes a un mismo campo conceptual reside en el hecho de que el trabajo con las mismas demanda el mismo tipo de operaciones y relaciones.

Por otra parte, el vínculo entre la proporcionalidad y las equivalencias entre las unidades fundamentales, las unidades derivadas, las ampliaciones, reducciones y las semejanzas hacen necesario incluirla en el terreno de la **medida**.

A su vez, es importante la extensión del tratamiento de la proporcionalidad a su aspecto funcional por varias razones. En primer lugar, la complejidad de la sociedad actual (en la que día a día el uso de recursos tecnológicos resulta accesibles a mayor cantidad de personas, la velocidad de transmisión de información impacta con su continuo avance, en la que se ha masificado la utilización de diferentes gráficas en los medios de comunicación) ha hecho necesaria la incorporación a la vida cotidiana del análisis en términos de "variaciones". Por ejemplo, hoy día es habitual escuchar palabras o expresiones como "crecimiento", "decrecimiento", "tasa de variación", etc. Por ello, la escuela debe incorporarlos más tempranamente, tanto para responder a posibles preguntas que se plantean los alumnos, como para permitir la interpretación de diversos hechos de la vida en sociedad. En segundo lugar, el tratamiento funcional permite unificar situaciones en apariencia diferentes, puesto que tanto la proporcionalidad directa como la proporcionalidad inversa son modelos matemáticos adecuados para describir situaciones cotidianas, fenómenos de diferentes disciplinas y situaciones vinculadas con la medida, los números y las operaciones.

Sin pretensiones de exhaustividad, se describirá un posible tratamiento de la proporcionalidad directa e inversa en forma conjunta con el abordaje de diferentes contenidos curriculares de Segundo Ciclo y los inicios de la Educación Secundaria Básica.

Proporcionalidad, números y operaciones

El fuerte vínculo entre la proporcionalidad y los números y las operaciones, permite trabajarla desde los primeros años de la escolaridad. Esta decisión favorece la construcción del sentido de las nociones involucradas.

Actividad 3.1

Enumeren los contenidos relacionados con la proporcionalidad que se tratarán a continuación. Trabajen en una hoja exclusiva para poder continuar este trabajo mientras realizan la lectura.

Proporcionalidad directa y multiplicación de números naturales: las tablas de multiplicar

Tradicionalmente, el estudio de las tablas de multiplicar estuvo asociado con la memorización, entendida como la repetición mecánica de productos aislados, o de una sucesión de productos aislados.

Como se analizó en el capítulo anterior, los niños comienzan a interactuar con la proporcionalidad cuando estudian la multiplicación. Resulta de particular interés el trabajo con tablas de proporcionalidad cuya constante es un número natural, puesto que es un buen punto de apoyo para el estudio de las tablas de multiplicar, tan relevante durante el Segundo Ciclo¹⁶.

Como ya se ha señalado, el trabajo a partir de problemas particulares puede ser utilizado como punto de apoyo para el estudio de las tablas de multiplicar, haciendo una descontextualización a partir del trabajo realizado. Por ejemplo, tomando en cuenta la tabla construida en aquella oportunidad:

Cantidad de café (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio (\$)	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

↑ Dato original

y a partir del análisis del procedimiento más eficaz para completar la tabla (multiplicar por 6 a la cantidad de café en cuestión), podemos descontextualizar la tabla de esta manera:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número x 6					30					

El trabajo anterior es equivalente a construir la tabla del 6 a partir de un único dato: $5 \times 6 = 30$. Se ha señalado que es conveniente que durante un tiempo los niños tengan acceso a los resultados que figuran en las tablas que han construido al resolver problemas contextualizados, ya que dichas tablas pueden actuar como "diccionario de consulta", y los resultados pueden ser memorizados paulatinamente, sin perderse de vista las estrategias que han utilizado para obtenerlos.

Un trabajo reflexivo como el que se propone no solo favorece la construcción del repertorio multiplicativo, sino también el posterior trabajo con la proporcionalidad como objeto matemático.

Proporcionalidad directa y equivalencia entre fracciones

El estudio de problemas de proporcionalidad directa en los que la constante de proporcionalidad es un número racional permite abordar uno de los sentidos de la equivalencia entre fracciones y a su vez ampliar el sentido de dicha constante, respecto de situaciones donde esta es un número natural.

Por ejemplo, si una persona camina a una velocidad constante y recorre 5 km en 2 horas; algunos pares de números que corresponden a esta relación serán:

¹⁶ Esta cuestión ha sido desarrollada en el apartado 2.4 del capítulo 2 del presente documento, por lo que sugerimos realizar una nueva lectura de dicho apartado.

Km	5	10	15	25	2,5	1,25
Horas	2	4	6	10	1	0,5

En este caso, la constante de proporcionalidad (obtenida al dividir la distancia recorrida en un determinado tiempo) es: $5/2 = 10/4 = 15/6 = 25/10 = 2,5/1 = 1,25 / 0,5$. Se trata de **razones** equivalentes.

Razones y fracciones

Es importante detenerse en la diferenciación de estos términos, que habitualmente se los utiliza como sinónimos.

Mientras que las **razones** expresan cocientes entre cantidades de magnitudes, con divisor no nulo, las **fracciones** expresan cocientes entre números enteros, con divisor no nulo, es decir, expresan números racionales.

De tales aclaraciones surge que las razones no siempre son números racionales y por ende, no siempre pueden expresarse mediante una fracción.

Por ejemplo, la razón entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro es el número irracional π .

Es de interés analizar que si en la tabla sólo incluimos valores enteros (por ejemplo, los cuatro primeros), quedan determinadas fracciones equivalentes:

Km	5	10	15	25
Horas	2	4	6	10

$$5/2 = 10/4 = 15/6 = 25/10$$

Por ejemplo, $5/2$ (en 2 horas marchó 5 km) y $10/4$ (en 4 horas recorrió 10 km), que implica que al doble de tiempo recorre el doble de distancia, son equivalentes ya que suponen la misma velocidad de marcha (2,5 km por hora). De esta manera, la equivalencia se interpreta y cobra sentido en términos de igual velocidad.

Actividad 3.2

- Propongan razones que puedan expresarse como fracciones y escribanlas en lenguaje coloquial (por ejemplo, 3 de cada 5 personas usan anillos).
- Seleccionen alguna de las propuestas que hicieron en a) y construyan una tabla de proporcionalidad. Identifiquen las fracciones equivalentes que aparecen en la situación.
- En diferentes libros de texto u otras propuestas de enseñanza, busquen problemas que permitan vincular la proporcionalidad directa con la equivalencia de fracciones. Si no se propicia la reflexión en torno al mencionado vínculo, propongan modificaciones de modo tal que pueda surgir.

Proporcionalidad directa y multiplicación y división de un número natural por uno racional en sus expresiones decimal y fraccionaria

La resolución de problemas de proporcionalidad en los que intervienen magnitudes continuas¹⁷ amplía el trabajo realizado con magnitudes discretas, dado que en los mismos pueden intervenir expresiones decimales o fraccionarias.

¹⁷ Distinguimos dos tipos de magnitudes: discretas y continuas. Magnitud discreta refiere a cantidades que pueden enumerarse (figuritas, alfajores, etcétera); magnitud continua refiere a cantidades que pueden medirse (tiempo, capacidad, peso, etcétera).

Por ejemplo, si se considera la siguiente tabla, que relaciona la cantidad de jabón en polvo que se compra en un supermercado (en kg) y el precio que se paga (en \$) y se aclara que no se hacen descuentos por comprar en cantidad, puede propiciarse un trabajo en relación con la multiplicación y división de un número natural por un número racional.

Cantidad de jabón (en kg)	1	2	3			5
Precio que se paga (en \$)	4	8		24	48	

Los valores que aparecen en la tabla favorecen el estudio de las propiedades de la proporcionalidad (al doble el doble; al triple, el triple; a la mitad, la mitad; al sumar dos cantidades de una de las magnitudes, se obtiene la suma de las cantidades correspondientes de la otra), y si la extendiéramos para otros valores, los números que aparecerían podrían ser decimales. Por ejemplo, podríamos preguntar por el precio de 100 gramos, 250 gramos, 500 gramos, 1 kilo 100 gramos, 300 gramos, etcétera.

Una primera dificultad que probablemente encuentren los alumnos es reconocer relaciones entre las nuevas cantidades y las que ya aparecen en la tabla; por ejemplo: 500 gramos es la mitad de 1 kilo, por lo tanto se pagará la mitad; 100 gramos es la décima parte de 1 kilo, por lo tanto se pagará la décima parte de dinero; 300 gramos es el triple de 100 gramos, por lo tanto se pagará el triple; 1 kilo 100 gramos es la suma de 1 kilo y de 100 gramos, entonces se pagará la suma de ambos precios; etcétera.

Una segunda dificultad para los alumnos podría vincularse con la manera en que van a registrar las nuevas cantidades en la tabla. La necesidad de expresar la cantidad de jabón en kilos fuerza la utilización de números decimales, partiendo de la equivalencia 1.000 gramos = 1 kilo, o bien, 100 gramos = $1/10$ kilo = 0,1 kilo. Así por ejemplo, 300 gramos es 3 veces 0,1 kilo, es decir, $3 \times 0,1$ kilo = $0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$ kilos; el precio de 300 gramos es el triple del precio de 100 gramos, es decir, 3 veces 0,4 = $3 \times 0,4 = 0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,2$.

Notemos que el contexto sirve como apoyo para estudiar estos nuevos cálculos en base a cuentas más sencillas que los alumnos pueden controlar. Será tarea del docente favorecer que los alumnos reconozcan todos los cálculos que subyacen a sus razonamientos, para registrarlos y utilizarlos como referencia en el estudio de la multiplicación y la división de números decimales y naturales en forma descontextualizada.

De manera análoga, se puede propiciar un trabajo en torno a la multiplicación y división de fracciones por un número natural. Por ejemplo, considerando la siguiente tabla, que relaciona la cantidad de porciones de comida que prepara un cocinero y la cantidad de pescado que necesita para preparar el plato (en kilos).

Cantidad de porciones	3	4	2	6	5	10	1
Cantidad de pescado necesario (en kg)	$1/4$						

Esta situación también favorece la utilización de las propiedades de la proporcionalidad directa para completar algunos de los casilleros. Necesariamente se debe operar con fracciones; por ejemplo, para completar el casillero correspondiente a 6 porciones, podemos duplicar el casillero correspondiente a 3, es decir, 2 veces $1/4 = 2 \times 1/4 = 1/4 + 1/4 = 1/2$; para 1 porción se puede dividir por 3 la cantidad correspondiente a 3 porciones, es decir, $1/4 : 3$ (cálculo que podría apoyarse en un dibujo de la situación).

En este caso nuevamente el contexto sirve como apoyo para estudiar nuevos cálculos en base a cuentas o estrategias más sencillas que los alumnos pueden controlar. También será tarea del docente favorecer que los alumnos utilicen distintos caminos para resolver y que identifiquen los cálculos que subyacen a sus razonamientos.

Proporcionalidad inversa y multiplicación de racionales

Si bien el estudio de los números racionales se apoya en los conocimientos que los niños tienen sobre los números naturales, es necesario tener en cuenta las diferencias entre ambos tipos de números. Una diferencia importante está centrada en la idea de que "multiplicar agranda" y "dividir achica", que funciona en el campo de los números naturales, pero que no es extensible al campo de los números racionales.

El trabajo con situaciones en las que interviene una relación de proporcionalidad inversa entre magnitudes continuas, puede contribuir a poner en cuestión ese supuesto erróneo.

Proporcionalidad inversa

Si las cantidades de dos magnitudes vinculadas entre sí varían de modo tal que su producto permanece constante, decimos que se trata de una relación de **proporcionalidad inversa**.

Las relaciones de proporcionalidad inversa están caracterizadas por la siguiente propiedad: al multiplicar una de las cantidades por un número, la cantidad correspondiente se divide por el mismo número, y la proporción se mantiene. Esto significa que al doble de una cantidad, le corresponde la mitad de la otra; al triple de una cantidad, le corresponde la tercera parte de la otra; etcétera. De esta forma, al realizar el producto entre las cantidades, éste se mantiene constante.

Por ejemplo,¹⁸ si se solicita a los alumnos que propongan posibles dimensiones para rectángulos de 12 cm² de área, las respuestas más probables incluirán los siguientes valores:

Lado a (en cm)	1	2	3	4	6	12
Lado b (en cm)	12	6	4	3	2	1

ya que en todos los casos $a \times b = 12$.

En esta propuesta subyace la idea de que las medidas de los lados son números naturales.

También es posible que algunos alumnos incluyan pares con expresiones decimales, por lo que la tabla podría quedar configurada del siguiente modo:

Lado a (en cm)	1	2	3	4	6	12	5	2,4
Lado b (en cm)	12	6	4	3	2	1	2,4	5

Si bien en este caso no subyace la idea anterior, en ambas propuestas se asume implícitamente que las dimensiones del rectángulo deben estar comprendidas entre 1 y 12.

En esta instancia, un análisis de la tabla centrada en la proporcionalidad inversa puede ayudar a poner en cuestión dos dificultades habituales:

- la referida al intervalo de variación de las dimensiones del rectángulo y
- la referida al funcionamiento de la multiplicación de racionales.

La propiedad característica de las relaciones de proporcionalidad inversa (si una cantidad se duplica, la correspondiente se reduce a la mitad, si una cantidad se triplica, la correspondiente se reduce a la tercera parte, ...), puede favorecer la aparición de valores como los sombreados:

		x 5						: 10		
Lado a (en cm)	1	2	3	4	6	12	5	2,4	15	0,5
Lado b (en cm)	12	6	4	3	2	1	2,4	5	0,8	24
		: 5						x 10		

¹⁸ El problema propuesto y algunos elementos de su análisis es una adaptación del incluido en el Diseño Curricular del Segundo Ciclo, Dirección de Planeamiento de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Esta última tabla puede dar lugar a que se discutan ideas y se elaboren diversas conclusiones. En primer lugar, podemos analizar que es posible seguir encontrando valores correspondientes a los lados del rectángulo (de tal manera que cuando hagamos el producto $a \times b$ el resultado siempre sea 12) multiplicando o dividiendo valores que ya tenemos en la tabla. Este proceso de búsqueda no tiene límite, y las posibles dimensiones que podemos encontrar para el rectángulo son infinitas (aunque algunos sean muy difíciles de medir efectivamente).

En segundo lugar, dado que el área es constante e igual a 12 cm^2 , si uno de los lados es menor que 1 cm, el otro lado debe ser mayor que 12 cm. Descontextualizando los valores del problema puede estudiarse que "multiplicar no siempre agranda": si uno de los factores está comprendido entre 0 y 1, el producto es menor que el otro factor (tomando como ejemplo la última columna de nuestra tabla $a \times b = 12$, si $a = 0,5$ entonces b será mayor que 12; en este caso, $b = 24$).

Proporcionalidad directa y medida

Si bien es posible proponer numerosos ejemplos de situaciones que vinculan proporcionalidad directa y medida (porcentajes, cambios de unidades, escala, semejanzas, etc.), en este apartado solo analizaremos dos: una referida a magnitudes de la misma naturaleza y otra, a magnitudes de diferente naturaleza.

Proporcionalidad directa y magnitudes de la misma naturaleza

Cambios de unidades. Magnitudes fundamentales y derivadas

Medir significa comparar. Cuando medimos tratamos de establecer cuántas veces entra una unidad de medida determinada en el objeto que queremos medir. La unidad que utilizamos es arbitraria y se elige por motivos tales como conveniencia, costumbre, convención o comodidad. Pensemos por ejemplo en la longitud. Existen numerosas unidades que han sido utilizadas a lo largo de la historia, que van desde relaciones con las distintas partes del cuerpo humano (codos, pies, pulgadas, yardas, etcétera) hasta las del sistema métrico decimal, independientes del individuo y de cualquier referencia a nacionalidades. La ventaja del uso del sistema métrico decimal por sobre otros es su relación con nuestro sistema de numeración, también decimal. Cualquier medida en este sistema puede descomponerse en suma de múltiplos de potencias de diez, cada una de las cuales se corresponde exactamente con una de las unidades del sistema. Así, por ejemplo:

$$2143 \text{ m} = 2000 \text{ m} + 100 \text{ m} + 40 \text{ m} + 3 \text{ m} = 2 \text{ km} + 1 \text{ hm} + 4 \text{ dam} + 3 \text{ m}$$

Esto se debe a la existencia de una relación de proporcionalidad de 1000 a 1 entre metros y kilómetros; de 100 a 1 entre metros y hectómetros; de 10 a 1 entre metros y decámetros. Podemos, entonces, enmarcar el trabajo de cambio de unidades entre las problemáticas de proporcionalidad, evitando tratarlo como un contenido aislado.

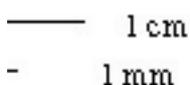
Por ejemplo, si se solicita a los alumnos completar el cuadro que se incluye a continuación, la puesta en juego de las propiedades que caracterizan a las relaciones de proporcionalidad directa permite estudiar la equivalencia entre metros y centímetros.

(m)	1	2	4				0,2				0,01	0,02
(cm)		200	400	600	50	10		500	1000	2000		

Si bien es importante notar que en este ejemplo la constante de proporcionalidad se expresa en cm/m , en el momento de introducir este tema puede resultar complejo analizarlo con los alumnos, por lo que es adecuado reservarlo para años posteriores.

Una cuestión interesante, que podría ser objeto de reflexión en el aula, es que cuanto menor es la unidad que utilizamos para medir, mayor es el número que expresa la medida en cuestión. Por

ejemplo, supongamos que queremos medir el siguiente segmento:



Si la unidad elegida es el centímetro, el segmento medirá 16; en cambio, si la unidad elegida es el milímetro, el segmento medirá 160.

Figuras de la "misma forma"

El trabajo con figuras de la misma forma da lugar a una diversidad de actividades que involucran la noción de semejanza. Aún sin abordar su definición formal, es posible plantear actividades de esta naturaleza desde el Segundo Ciclo, apelando a ejemplos cercanos a los alumnos, como fotografías, y fotocopias.

Dos rectángulos son semejantes ("tienen la misma forma") si, aún teniendo distinto tamaño, conservan la proporción entre sus lados. Por ejemplo, un rectángulo que tenga lados de 4 cm y 9 cm será semejante a un rectángulo de 2 cm x 4,5 cm, pero no a uno de 3 cm x 8 cm. Esto es así, ya que:

		: 2
Largo (en cm)	9	4,5
Ancho (en cm)	4	2
		: 2

si un lado se reduce a la mitad, el otro también, y el rectángulo conserva sus proporciones originales, a pesar de cambiar de tamaño. Observemos que se trata de una relación de proporcionalidad directa cuya constante de proporcionalidad es el cociente entre el largo y el ancho del rectángulo. En este caso, este valor es $9/4 = 4,5/2 = 2,25$

En cambio, en este caso:

Largo (en cm)	9	8
Ancho (en cm)	4	3

no se mantiene la proporción; al calcular el cociente entre largo y ancho, obtenemos dos valores diferentes: $9/4 = 2,25$ pero $8/3 = 2,66666.....$

Puede proponerse a los alumnos actividades que apunten al estudio de la relación anterior. Por ejemplo,¹⁹ podríamos entregarles varios rectángulos de papel de diferente tamaño:

24 cm x 15 cm; 16 cm x 10 cm; 15 cm x 9 cm; 10 cm x 8 cm;
10 cm x 6 cm; 12 cm x 12 cm; 8 cm x 3 cm; 5 cm x 4 cm; 5 cm x 5 cm.

y pedirles que agrupen los que tienen la misma forma.

Es probable que en un primer momento el criterio para realizar la clasificación esté centrado en la percepción visual, esto es: los cuadrados en un grupo, los rectángulos no cuadrados en otro. A fin de que pongan en juego la relación entre las medidas de los lados, puede proponerse que discutan en torno a una clasificación realizada por otros:

"Unos chicos de otro colegio hicieron tres grupos de rectángulos:

Grupo A: 12 cm x 12 cm; 5 cm x 5 cm

Grupo B: 10 cm x 8 cm; 5 cm x 4 cm

Grupo C: 24 cm x 15 cm; 16 cm x 10 cm

¹⁹ Esta actividad se elaboró a partir de una propuesta de Fiol, M. y Fortuna, J., *Proporcionalidad Directa. La forma y el Número*. Madrid, Síntesis, 1990.

- ¿Qué tuvieron en cuenta para agruparlos de esta manera?
- ¿Hay algún otro rectángulo que pueda agregarse en alguno de los grupos?
- ¿Hay otros rectángulos que puedan agregarse en cada uno de los grupos?"

En esta actividad seguramente encontrarán coincidencia con su propio criterio para el grupo A; sin embargo, se verán forzados a identificar las razones por las que se proponen dos grupos diferentes de rectángulos no cuadrados. Se busca poner en primer plano el significado de "rectángulos de la misma forma" como "rectángulos que mantienen la proporción entre las medidas de sus lados". En el grupo B, la relación aparece de manera más obvia, puesto que se ha elegido mostrar una relación de dobles (al doble, el doble; a la mitad, la mitad). Sin embargo, en el grupo C el criterio no es evidente, y es muy probable que apelen a relaciones aditivas; por ejemplo: "para que el lado de 24 cm se convierta en 16 cm, se restó 8 cm; por lo tanto, a 15 cm también le resto 8 cm". Sin embargo, esta cuenta da 7 cm, y no 10 cm, lo que llevará a poner en cuestión el supuesto de que la resta es la vía idónea para resolver el problema.²⁰

Posteriormente puede plantearse que completen una tabla para un grupo seleccionado de rectángulos, en la que se conocen algunas longitudes de los largos y de los anchos de algunos de ellos y quedan espacios para completar. Por ejemplo:

Largo (en cm)	10	5		20		
Ancho (en cm)	8	4	20		15	1,2

A partir de los datos de la tabla se puede determinar la constante de proporcionalidad, que surge del cociente entre el largo y el ancho de un grupo de rectángulos de la misma forma.²¹

Esta actividad puede servir de apoyo para introducir la noción de escala. En este sentido, podría proponerse a los alumnos que dibujen el plano del piso de su dormitorio. Para realizar dicha tarea van a necesitar conocer las dimensiones de su habitación.²² La puesta en común de los diferentes procedimientos utilizados favorece la explicitación de la noción de escala: razón entre una longitud en la figura y la correspondiente longitud en la realidad. Esta razón es una constante de proporcionalidad.

Actividad 3.3

Consideren el siguiente ejemplo:

Si en un plano en detalle de un baño, una bañera de 1,50 m de largo se dibuja de 7,50 cm, la escala utilizada es²³:

$$\frac{7,50 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} = \frac{1}{25}$$

A partir del mismo, elaboren tres problemas diferentes que involucren el trabajo con la noción de escala. Expliquen el por qué de las diferencias establecidas.

Al trabajar con escalas en que la unidad de longitud seleccionada para realizar el dibujo coincide con la unidad seleccionada para medir la correspondiente longitud del objeto real, es importante que los alumnos reflexionen en torno a dos aspectos esenciales:

- La escala no tiene unidad (es **adimensional**).
 - La escala puede ser mayor, menor o igual que 1.
- Si se trata de un agrandamiento, el factor de escala es mayor que 1 (porque las dimensiones de la "copia" serán mayores que las de la figura original, y por lo tanto el dividendo será mayor que el divisor); por ejemplo, cuando se aumenta una fotografía tomada con microscopio.

²⁰ Esta cuestión ha sido desarrollada en el apartado 3.1 del capítulo 2 del presente documento. Sugerimos realizar una relectura de dicho material.

²¹ Esta tabla también podría completarse utilizando las propiedades de la proporcionalidad directa

²² Para que la tarea no resulte demasiado compleja ni demasiado alejada de lo discutido hasta aquí, deberíamos trabajar suponiendo que los dormitorios tienen forma rectangular.

²³ Expresamos ambas cantidades con la misma unidad, es decir, 1,50 m lo escribimos como 150 cm, de manera tal que las unidades sean las mismas (cm en ambos casos) y se simplifiquen.

- Si la longitud del dibujo coincide con la longitud del objeto, el factor de escala es igual a 1 (porque las dimensiones de la "copia" serán iguales que las de la figura original, y por lo tanto el dividendo será igual que el divisor); por ejemplo, cuando se saca una fotocopia en tamaño real.
- Si se trata de una reducción, el factor de escala es menor que 1 (porque las dimensiones de la "copia" serán menores que las de la figura original, y por lo tanto el dividendo será menor que el divisor); por ejemplo, en planos de obra y en mapas.

Proporcionalidad directa y magnitudes de diferente naturaleza

Las situaciones de proporcionalidad en las que intervienen magnitudes de diferente naturaleza permiten abordar un sentido diferente de la constante de proporcionalidad. En este caso, dicha constante sí tiene unidades, y están determinadas tanto por la naturaleza de las magnitudes involucradas como por las unidades de medidas en las que se ha elegido expresar las cantidades correspondientes.

Este tipo de problemática será abordada en la ESB. Sin embargo, analizaremos aquí las diferencias que presenta este tipo de situación, a fin de enriquecer la mirada.

Consideremos el ejemplo analizado en el apartado 2.2, sobre la distancia recorrida por una persona en un determinado tiempo, suponiendo un ritmo de marcha constante:

Km	5	10	15	25	2,5	1,25
Horas	2	4	6	10	1	0,5

Según utilicemos las propiedades o la definición de proporcionalidad, es posible identificar diferentes relaciones:

- Las unidades de medida no intervienen cuando se analiza, por ejemplo, que al doble de una distancia corresponde el doble de tiempo, pues esta propiedad se cumple aunque se decida, por ejemplo, medir la distancia en metros y el tiempo en minutos; así: 5000 metros se recorren en 120 minutos y 10.000 metros se recorren en 240 minutos.
- Sin embargo, si utilizamos la definición de proporcionalidad, podemos establecer que la relación entre una determinada distancia recorrida y el tiempo que ha llevado recorrerla es un valor constante, 2,5 km/h, que es la velocidad de la marcha. En este caso, estamos estableciendo una relación en la que intervienen magnitudes de diferente naturaleza.

Es importante tener en cuenta que si las magnitudes se miden en otra unidad, la relación de proporcionalidad se mantiene pero la constante puede cambiar, aún considerándola en el mismo sentido. Utilizando el ejemplo anterior, si la distancia se mide en m y el tiempo en minutos, la velocidad de la marcha es: 41,6666... m/min (proveniente de dividir 5000m/120min).

Las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes de diferente naturaleza no sólo se encuentran en Física. El problema de los pulidores, que incluimos en el Capítulo 1 también es un ejemplo de este tipo de situación. Otro ejemplo de interés se encuentra en las escalas que vinculan diferentes magnitudes, como por ejemplo, las líneas de tiempo, en las que una determinada longitud representa una cantidad de años.

Proporcionalidad y probabilidades

Si bien la noción de proporcionalidad se explicita en la definición clásica de probabilidad propuesta por Laplace (*razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente "probables"*), el vínculo entre ambas nociones puede abordarse mucho antes de que los alumnos conozcan esa definición, reservada para los últimos años de la ESB.

Por ejemplo, la actividad²⁴ que se describe a continuación permite poner en juego nociones intuitivas acerca de la probabilidad como razón.

²⁴ Esta actividad ha sido extraída Godino, J. y Batanero, C. "Proporcionalidad para Maestros". Granada, Proyecto Educativo- Maestros, 2002.

Se colocan fichas de dos colores en una bolsa, por ejemplo, 4 rojas y 8 azules. Se les dice a los alumnos que en la bolsa hay fichas de colores, pero no se aclara ni la cantidad de fichas ni la cantidad de colores. Se sacude la bolsa, se extrae una ficha y se anota el color. Luego se vuelve a colocar la ficha adentro de la bolsa. Se realizan 15 ó 20 extracciones más y se discute los posibles colores de las fichas en la bolsa, y también cuántas fichas de cada color puede haber.

Se esperan respuestas como: "es poco probable que haya fichas de otros colores, más que rojas y azules, porque sólo salieron esas"; "hay más fichas azules que rojas porque salieron más veces las azules"; "hay menos fichas rojas"; etcétera.

También, dado que la proporción es "el doble de azules que de rojas", es posible que si realizamos muchas extracciones (100, por ejemplo) esta relación sea visible en el registro que llevamos, y aparezca en las afirmaciones de los niños. Sin embargo, al tratar con extracciones al azar la relación "el doble de azules que de rojas" no necesariamente aparecerá bien determinada en el registro. Puede ocurrir que aparezcan relaciones aproximadas; por ejemplo, los niños podrían observar que "hay más azules que rojas; salieron casi el doble de veces las azules".

Después de algunas extracciones más, puede preguntarse cuál les parece que puede ser la menor cantidad de fichas presentes en la bolsa. Esta pregunta apunta a formular hipótesis fundamentadas en los resultados de las extracciones y en las afirmaciones que han circulado a propósito de las discusiones anteriores. Por ejemplo, podrían surgir ideas como: "tiene que haber por lo menos 3, porque hay más azules que rojas, entonces puede ser una roja y dos azules"; "no puede haber una sola, porque por lo menos hay dos colores"; "hay más de dos porque salieron más las azules, así que seguro que hay más de esas; no puede haber una de cada color"; etc.

A continuación podría darse a conocer uno de los siguientes datos: cantidad total de fichas que hay en la bolsa, o bien cantidad de fichas de un color. Puede preguntarse si con ese dato es posible predecir cuántas fichas de cada color hay en la bolsa. Se espera que los niños puedan utilizar hipótesis acerca de la cantidad relativa de fichas de uno y otro color para producir respuestas como: "si hay 12 fichas, entonces no pueden ser 6 rojas y 6 azules, porque hay más azules; podrían ser 5 rojas y 7 azules, o más" (si se da el número total de fichas); "si hay 4 rojas, entonces tiene que haber 5 o más azules" (si damos la cantidad de un tipo de fichas).

Seguramente las respuestas serán variadas; si el registro mostró más claramente la relación "el doble de azules que de rojas", podrían aparecer respuestas asociadas a esta relación y por lo tanto el número de respuestas se ve reducido a una única posibilidad (8 y 4).

Probablemente los niños no acierten la cantidad correcta y tampoco es el objetivo último de la actividad. La naturaleza de este fenómeno hace que la regularidad que observemos dependa fuertemente de la cantidad de extracciones realizadas. Puede proponerse aumentar este número, para ver que la proporción de rojas y azules se mantiene, no de manera exacta sino aproximadamente, en "el doble de azules que de rojas".

En una etapa posterior podría preguntarse qué sucedería si el número total de fichas fuera mayor, manteniendo la relación de proporcionalidad entre la cantidad de fichas rojas y azules. Los niños podrían encontrar dificultades para imaginar situaciones hipotéticas; en ese caso, el maestro podría sugerir cantidades para analizar: "Si en lugar de 12 fichas hubiera 30, ¿cuántas serían azules? ¿Cuántas serían rojas? ¿Y si fueran 100?". Esta discusión favorece un análisis en términos de proporcionalidad directa.

Proporcionalidad y funciones

Las funciones son herramientas potentes para modelizar situaciones en las que debemos expresar una relación entre magnitudes. Esta tarea exige que determinemos cuáles son las magnitudes relacionadas y que analicemos cómo varían las cantidades. El estudio de la proporcionalidad desde una perspectiva funcional implica hacer foco en la manera en que varían las magnitudes involucradas, así como en el dominio de validez de la relación.

Si bien el concepto de función será abordado como objeto de estudio en la ESB, durante el Segundo Ciclo pueden proponerse problemas en los que una mirada funcional sea la herramienta idónea.

Funciones de proporcionalidad directa

En los problemas planteados anteriormente ha predominado una visión "estática" de las situaciones. Un tratamiento funcional de estos mismos problemas, exigirá una visión "dinámica". Para ilustrar lo que queremos decir, retomaremos el problema de los pulidores del Capítulo 1.

Supongamos que se presenta a los alumnos la situación del pulidor 1, aunque ahora sólo a partir de un dato, por ejemplo, que pulir 4 m² cuesta \$48, agregando la información referente a que no hay ningún gasto fijo y que no se hacen ofertas por cantidad.

Si la pregunta que les planteamos apunta a conocer el costo de pulir una determinada cantidad de m² (lo que hacemos cuando preguntamos, por ejemplo: "¿cuánto costará pulir 1 m²?"), el problema se resuelve haciendo un cálculo: planteando proporciones, por reducción a la unidad, con regla de tres simple, etcétera.

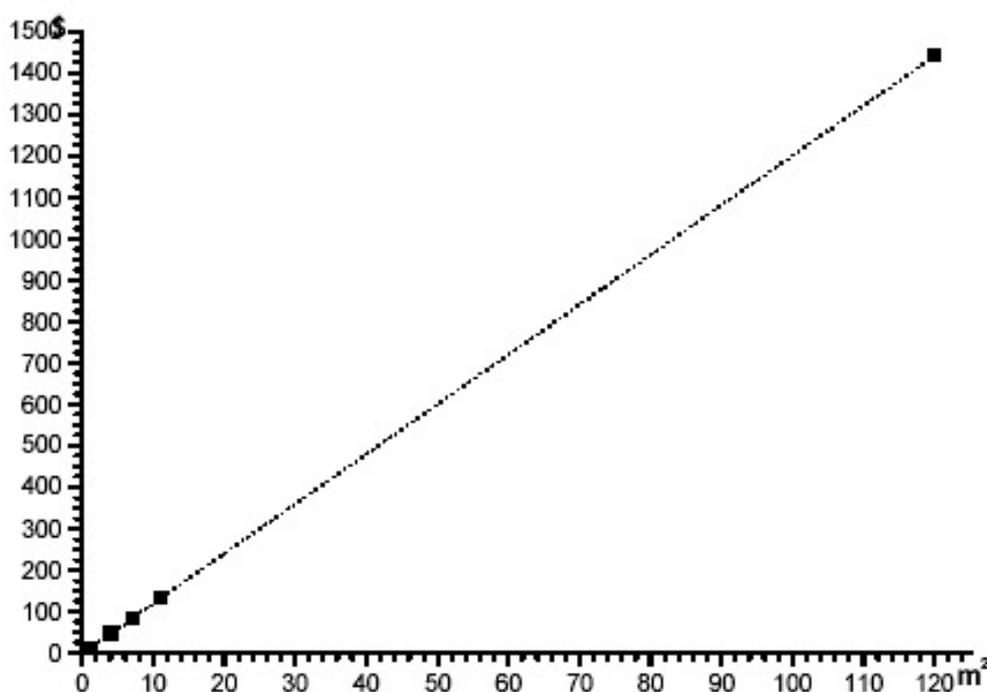
En cambio, si nuestra pregunta se enfoca en el *procedimiento* que permite calcular cuánto cuesta pulir una determinada cantidad de m², comienza a surgir la idea de que el costo depende de la cantidad de superficie que debemos pulir. Hay aquí una mirada dinámica de la situación, puesto que nos interesa encontrar la "ley" subyacente al fenómeno, y no un único valor asociado a una determinada cantidad.

Por ejemplo, podríamos proponer a los alumnos la siguiente situación: "Escriban una explicación que le darían por teléfono a un compañero que faltó, para que pueda calcular el costo de pulir una cierta cantidad de metros cuadrados". Si ya han calculado el costo de 1 m², podrán decir cosas como: "ya sabemos que 1 m² cuesta \$12, así que para calcular el costo de otra cantidad de m², podés multiplicar esa cantidad por 12".

Una explicación como la anterior es un buen punto de apoyo para la elaboración de una fórmula que describa esta relación. La fórmula que expresa la función de proporcionalidad que modeliza esta situación es $y = 12 \cdot x$ ⁽²⁵⁾ donde 12, la constante de proporcionalidad, expresa el precio unitario del metro cuadrado, x la cantidad de metros cuadrados a pulir, e y el precio del total de metros cuadrados pulidos.

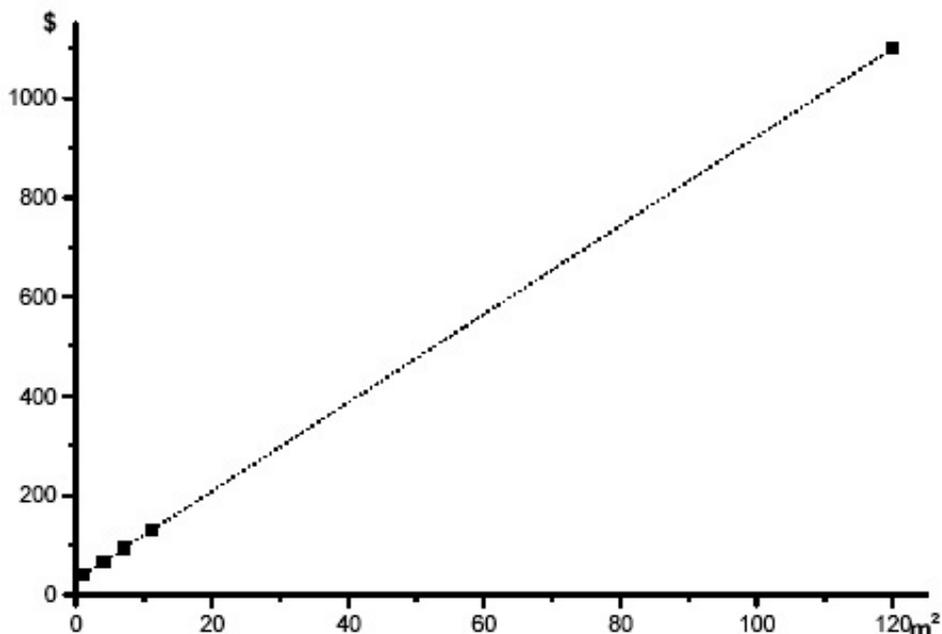
También podemos pedir a los alumnos que construyan un gráfico cartesiano en el que se represente esta relación. Para ello, seguramente elaborarán una tabla de valores. Por ejemplo:

X	1	4	12	120
Y	12	48	144	1440



²⁵ En rigor debemos expresar el factor 12 de la fórmula con su correspondiente unidad: 12 \$/m². Esta cuestión será analizada a continuación.

El gráfico muestra una sucesión de puntos alineados con el origen, característico de las relaciones de proporcionalidad directa. Al compararlo con el gráfico de el pulidor 2, que se incluye a continuación, se advertirá en este caso la falta de una relación de proporcionalidad.



Actividad 3.4

Elaboren una secuencia de problemas que parta desde cálculos de multiplicación y llegue al tratamiento funcional de la relación entre el lado y el perímetro de los cuadrados.

La constante de proporcionalidad directa

Analizaremos en primer lugar las dimensiones de la constante de proporcionalidad. En el caso de que x e y se refieran a magnitudes de la misma naturaleza y con las mismas unidades (por ejemplo, la relación entre los lados del rectángulo del apartado 3.1.2, en la que ambas magnitudes eran longitudes expresadas en centímetros), la constante de proporcionalidad no tendrá unidades. En caso contrario, como analizamos en la sección 3.2, ésta sí tendrá unidades.

Por ejemplo: ya sabemos que si x representa la longitud del lado de un cuadrado, en cm, e y es el perímetro correspondiente (también en cm), tenemos $y = 4 \cdot x$. Aquí la constante de proporcionalidad es 4, un número real, adimensional.

Retomando el ejemplo de los pulidores, si x representa la medida de la superficie a pulir (en m^2), e y es su costo, tendremos $y = p \cdot x$, en la que p tendrá dimensión: $p = 12 \text{ \$/m}^2$, puesto que representa el costo por metro cuadrado.

Al omitir la unidad para la constante de proporcionalidad queda planteada una igualdad entre magnitudes heterogéneas, lo cual es un error. Por ejemplo, en el caso de los pulidores, si no aclaramos que la unidad de la constante es $\text{\$/m}^2$, tendremos que, para $x = 1 \text{ m}^2$ e $y = \$12$ (primer par de valores de la tabla anterior), la expresión " $y = 12$ " $\cdot x$ nos lleva a la siguiente igualdad:

$$\$12 = 12 \cdot 1 \text{ m}^2 \Rightarrow \$12 = 12 \text{ m}^2$$

Actividad 3.5

Seleccionen un problema propuesto anteriormente (en este mismo capítulo o en los anteriores) y expresen con una fórmula la relación entre las magnitudes involucradas. Analicen las unidades de la constante de proporcionalidad.

Al estudiar los números negativos en la ESB, será necesario proponer a los alumnos el análisis

de relaciones de proporcionalidad directa que involucren cantidades negativas. Veamos, con un ejemplo, qué aportaría este estudio:

En un experimento de laboratorio se mide la temperatura de un compuesto por cada minuto que pasa a partir del inicio de dicho experimento. La tabla muestra estas mediciones:

Temperatura (°C)	-2	-4	-6	-8
Tiempo (min)	1	2	3	4

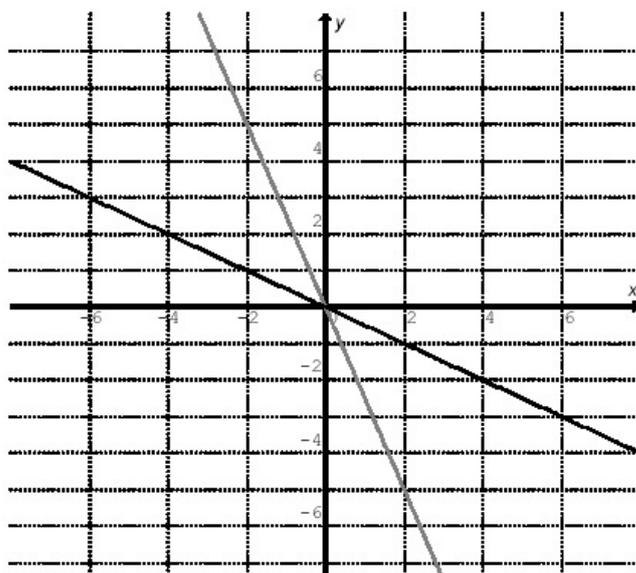
Si calculamos los cocientes entre los valores correspondientes de temperatura y de tiempo, obtendremos el valor -2 en todos los casos. Dicho valor (la constante de proporcionalidad) representa la cantidad de grados que disminuye la temperatura del compuesto por cada minuto que pasa, por lo tanto no es adimensional: -2 °C/min . Observemos que a medida que el tiempo pasa (aumenta), la temperatura disminuye. Esta situación es de proporcionalidad directa; sin embargo, no responde a la idea que suele utilizarse para distinguir a este tipo de proporcionalidad: "si una cantidad aumenta, la otra también".

Al considerar la función de proporcionalidad como objeto, más allá de su estudio como instrumento, podríamos considerar funciones de proporcionalidad con constante negativa en la ESB. Por ejemplo, podemos pedir a los alumnos que grafiquen las funciones de proporcionalidad:

$$y = -2,5x$$

$$y = -0,5x$$

(para lo cual podrían construir tablas de valores) y que verifiquen que se cumplen las propiedades estudiadas para este tipo de proporcionalidad.



Actividad 3.6

Realicen las gráficas anteriores (verifiquen que, para ambas relaciones, se cumplen las propiedades de la proporcionalidad directa, citadas en el Capítulo 1).

¿Por qué decimos que en estos casos no tiene validez la idea de "a más, más y a menos, menos"?

Algunas decisiones adoptadas en ciertos momentos de la enseñanza (como la de trabajar con la idea "si una cantidad aumenta, la otra también; si una cantidad disminuye, la otra también" al estudiar proporcionalidad directa), pueden resultar facilitadoras durante un tiempo para los alumnos; pero también pueden convertirse en un obstáculo difícil de superar al seguir avanzando en la construcción del sentido de las nociones en juego.

El uso de dominios naturales o reales, de todo el conjunto numérico o parte del mismo (por exi-

gencias de la situación o problema) es otra interesante área de exploración para los alumnos.

Funciones de proporcionalidad inversa

Al estudiar la proporcionalidad inversa desde una perspectiva funcional, nos encontramos con que pertenece a otra familia de funciones llamadas homográficas (que son un caso particular de función racional). Si graficamos la situación en un sistema cartesiano ya no obtendremos puntos alineados con el origen, como en el caso de proporcionalidad directa.

Analicemos el ejemplo de los rectángulos de área 12 m^2 . Puesto que el área es el producto de la base y la altura del rectángulo, tendríamos:

$$b \cdot h = A \quad \text{con} \quad A = 12$$

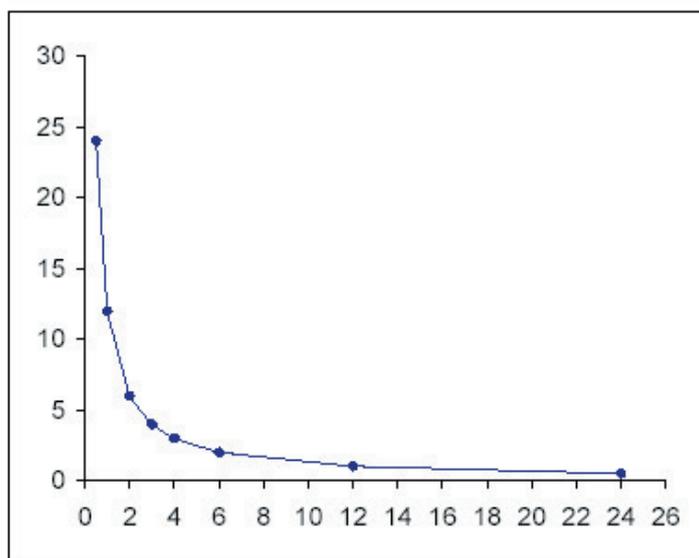
$$b \cdot h = 12 \Rightarrow b = 12 / h \quad \text{o bien} \quad b = 12 \cdot 1/h$$

Estas fórmulas expresan que la longitud de la base es inversamente proporcional a su altura (omitimos aquí las unidades de la constante de proporcionalidad).

Utilizando la notación que usamos antes, tendríamos: $y = A \cdot 1/x$ siendo x la longitud de la base (por ejemplo en m), y la longitud de la altura, también en m, y A el área fija, en m^2 , que es la constante de proporcionalidad.

Si descontextualizamos la función de la situación del rectángulo, los posibles valores que puede tomar la variable x son los números reales distintos de cero (x no puede tomar el valor 0 porque esto implicaría una división por 0). Pero si trabajamos en el contexto de este problema, los valores de x sólo pueden ser números reales positivos, ya que no tendría sentido que una longitud tomara valores negativos.

Si graficamos la situación en un sistema cartesiano (por ejemplo, a partir de la tabla de valores que se construyó a propósito del problema de los rectángulos), se obtiene un conjunto de puntos que determinan una curva como la que se muestra a continuación:



Actividad 3.7

a) Realicen la lectura de "Repitan conmigo: ¡No se puede dividir por cero!", de Adrián Paenza, en el Anexo 3.1. En el texto se da una explicación de por qué **no tiene sentido** dividir por cero.

A partir de la lectura, diseñen una situación de enseñanza que permita a los alumnos justificar por qué no se puede dividir por cero y que pueda ser abordada durante el desarrollo del tema *Proporcionalidad inversa*. Indiquen qué conocimientos mínimos necesitan los alumnos para poder resolverla, cómo organizarían la clase, qué errores y dificultades podrían surgir y que intervenciones docentes pueden anticipar.

b) A continuación les mostramos dos argumentos que intentan mostrar por qué **no se puede** dividir por cero. Expliquen el significado de cada uno.

- En la multiplicación, el cero se llama absorbente porque cualquier número multiplicado por 0 da 0. La división por 0 no está definida porque daría lugar a errores como el siguiente: si $3 \times 0 = 4 \times 0$, entonces, $3 = 4$!
- Cuando se intenta encontrar el cociente en una división con divisor cero y dividendo distinto de cero, no podemos hallar ningún valor que verifique la relación entre las partes de la división "exacta"²⁶: $D = c \cdot d$ (D: dividendo; c: cociente; d: divisor)

A modo de cierre

Con este breve recorrido, intentamos poner de manifiesto que el vínculo de la proporcionalidad con contenidos de distintos ejes permite planificar la enseñanza de modo tal que el concepto reaparezca a lo largo de cada año, y que los alumnos puedan reconocer, bajo apariencias diferentes, la definición y las propiedades invariantes que caracterizan a las proporcionalidades directa e inversa.

Resulta fundamental que al momento de abordar el trabajo con cada uno de los contenidos relacionados, se ponga en evidencia su vinculación con "apariciones" anteriores del concepto de proporcionalidad.

Pensamos que un trabajo en esta línea es una mejor opción para el estudio de todos los contenidos relacionados con este concepto, y también para el estudio de la proporcionalidad en sí, usualmente abordada en una misma época del año y desvinculada del resto del programa.

Actividad 3.8

Hasta ahora han venido construyendo el listado de contenidos conexos con la proporcionalidad como eje. ¿Se pueden establecer además vinculaciones entre ellos? Expresen las que encuentren de manera coloquial, por escrito. Luego, reúnanse entre colegas e intenten juntos construir una red.

²⁶ Nos referimos aquí a división "exacta" en tanto división con resto cero, y cuyo cociente puede ser un número real cualquiera (decimal, natural, etcétera). La distinguimos así de la división "entera", en la que tanto cociente como resto deben ser números enteros, que verifiquen la relación: $D = c \cdot d + r$, con $0 \leq r < d$.

Bibliografía

- Azcárate, C. y Deulofeu Piquet, J., *Funciones y gráficas*. Madrid, Síntesis, 1996.
- Broitman, C., *La enseñanza de las operaciones en el primer ciclo. Aportes para el trabajo en el aula*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 1999.
- CGCyE, Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, La Plata, DGCyE, 2001.
- Fiol, M. y Fortuni, J., *Proporcionalidad directa, la forma y el número*. Madrid, Síntesis, 1996.
- Godino, J. y Batanero, C., *Proporcionalidad para Maestros*. Granada, Proyecto Edumat- Maestros, 2002
- Paenza, A., *Matemática... ¿estás ahí?*, Buenos Aires, Siglo XXI, 2005.
- Ponce, H., *Enseñar y aprender Matemática. Propuestas para el segundo ciclo*. Buenos Aires, Novedades Educativas, 2004.
- Ponce, H. y Quaranta, M. E., Material para el docente (4°/5° y 6°/7°), Proyecto Conformación de Grados de Aceleración, GCBA, 2004.
- Secretaría de Educación, *Prediseño Curricular para la Educación General Básica, Segundo Ciclo*, Tomo 2. Buenos Aires, GCBA, 1999.

Anexos

Capítulo 1

Anexo único. Colega docente, usted está participando del Desafío matemático áulico 2005

Las pautas de trabajo para este nivel consisten en las siguientes consideraciones:

1. Distribuya el material necesario para trabajar.
2. Como siempre los alumnos harán una primera lectura silenciosa en forma individual.
3. Indique a los alumnos que resuelvan el problema (en caso de ser necesario pueden tachar, pero será interesante que no borren ninguna producción).
4. Fije un tiempo conveniente para esta instancia, en todo caso trate de que no se superen los 15 minutos, controle el tiempo, mientras atiende las consultas que surjan (en forma individual o pública según lo crea conveniente).
5. Vencido el plazo anteriormente estipulado, ubique a los alumnos en grupos de 4 o más en los que deberá elegirse democráticamente un coordinador que organice la discusión sobre:
 - a. el problema:
 - Si resultara necesario, realizar una nueva lectura, en voz alta.
 - Describir brevemente lo que cada uno entendió.
 - b. Las soluciones:
 - Haga que los alumnos discutan y confronten las producciones individuales, con la misma mecánica anterior pero con un tiempo mayor para cada exposición, y que seleccionen la mejor solución o que construyan una nueva que los represente (la solución del grupo puede ser una de las que alguno de los miembros del grupo realizó o pueden elaborar una mejor, si no tienen nada que los satisfaga plenamente)
Esta etapa no puede llevar más de 30 minutos. El grupo debe copiar la producción final en un papel afiche.
6. Se procede entonces a la elección del representante que expondrá en grupo las conclusiones del pequeño grupo y se procede a escribir las cuestiones que el grupo considera indispensables para la exposición a toda el aula. Además de estas cuestiones, el representante electo podrá agregar otras que considere convenientes.
7. Finalmente, los grupos defienden en el grupo total su solución. Para ello el docente orientará una puesta en común de:
 - a. La interpretación del problema.
 - b. La solución seleccionada.
 - c. La respuesta construida.

- El docente dirigirá la discusión, procurando generar la confrontación entre las estrategias empleadas o las que no se emplearon (si no se empleó una estrategia que Ud. considera importante, la propondrá a los alumnos para que confronten las empleadas con esa)
8. A partir de la confrontación, el docente propondrá al curso que elijan la respuesta que consideren como más apropiada para el problema y que sea representativa del curso. Esa solución definitiva será copiada en papel tipo afiche.
9. La puesta en común (7 y 8) tendrán un tiempo estipulado de 30 minutos.
10. Haga un registro en el momento de las situaciones que, en el aula, le hayan resultado relevantes. Por ejemplo, diálogos de los niños, preguntas que pudieron surgir, niños que no trabajan, niños que se entusiasman, dificultades detectadas, estrategias por los niños elegidas, sus propias intervenciones docentes... etc.

Recomendaciones

Tiempo total de la jornada **2 horas** con recreo (respete los horarios institucionales de clase y recreo).

Luego, envíe al referente regional por medio de su supervisor tutor

1. El registro.
2. Las producciones individuales que considere más interesantes.
3. Una reproducción de los afiches. (en tamaño A4 u oficio)
4. La producción final del curso.

Nota para el directivo y cuerpo docente

Recuerde organizar un espacio de trabajo en cual se expondrán, en la escuela, las soluciones halladas por cada grupo y la solución definitiva elegida por el curso.

Capítulo 2

Primer anexo. ¿Un procedimiento? ¿Muchos? ¿Ninguno? El más económico según el caso (otro desencuentro), del libro *Enseñar y aprender Matemática* de Héctor Ponce

Cuando los problemas de proporcionalidad son un contenido a enseñar aparece en primer plano la necesidad de contar con algún procedimiento que permita resolverlos.

Ya sea por su propia historia como alumno, por su proceso de formación posterior o por cualquier otra razón, es posible que el docente elija un procedimiento y explicita la secuencia de pasos que lo componen.

El supuesto que orienta esta práctica pareciera indicar que se trata tan sólo de un problema de explicitación y que, cuanto mayor claridad contenga, menos dificultades encontrarán los alumnos para comprender el método y, por lo tanto, utilizarlo.

Sin embargo, la existencia de un único procedimiento (cualquiera de ellos como por ejemplo el pasaje por la unidad) genera múltiples dificultades.

La primera, evidente, es que descarta la existencia de otras posibles formas de resolución y, por lo tanto, la búsqueda de nuevas alternativas.

El conocimiento está acabado, construido, tiene una sola versión y un único poseedor que presenta el cómo hacer en un modelo oficial. De esta manera, queda disimulado que el por qué no es objeto de cuestionamiento; abonando tal vez en los alumnos la idea de que los saberes matemáticos son un conjunto de reglas arbitrarias concebidas por otros.

Pero... en el medio, ¿qué? En primer lugar, Marisa no advirtió por sí sola que el resultado era un disparate (75 litros cuestan más del doble de lo que cuestan 50!). Tampoco hizo ninguna reflexión a partir de comparar el resultado con el correcto. Sin embargo, cuando le preguntamos cuánto costaban 25 litros inmediatamente nos contestó: Ah!, claro, 75 litros cuestan \$60. (!?) Notemos que apenas se le sugirió a esta niña el pensar en 25 litros pudo componer 75 como 50 + 25 y obtener la respuesta correcta. Atada al procedimiento escolar del "pasaje por la unidad" Marisa perdió completamente el control de lo que estaba haciendo.

Tercer anexo. Extracto de la ficha número 4, "Las tablas de multiplicar", en Propuestas para el aula-EGB 2, Ministerio de Educación de la Nación

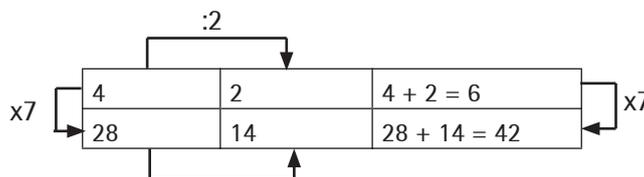
Contenidos: Modelización de situaciones problemáticas a través de tablas, en relación con la proporcionalidad directa.

Propósitos: En estas actividades proponemos el uso de tablas en la modelización partiendo de la reconstrucción de las tablas de multiplicar, en el marco de la proporcionalidad. Lo que buscamos es que los alumnos identifiquen las regularidades que caracterizan las situaciones de proporcionalidad directa, organicen la información en tablas y las utilicen en la resolución de este tipo de problemas, enunciados en otros lenguajes.

Desarrollo:

Actividad 1

Elegimos el trabajo con tablas de multiplicar porque en ellas es fácil reconocer el factor de proporcionalidad. Además, el análisis de estas tablas posibilita verificar que las transformaciones que permiten pasar de un elemento a otro, en la misma fila o columna, son las que permiten encontrar los elementos correspondientes en la otra fila o columna (a un número corresponde su producto por el factor de proporcionalidad; a la mitad de un número corresponde la mitad de su producto por el factor de proporcionalidad; a la suma de números corresponde la suma de los productos; etc.). Así por ejemplo, para la tabla del 7, se tiene:



Ejemplos:

Mariano no logró memorizar la tabla del 7, pero escucha a su compañero Adrián decir que 7×4 es 28. La maestra les pide que escriban la tabla del 7 y Mariano encuentra, sin ayuda, un camino para hallar los demás números de la tabla sin necesidad de sumar o restar 7 cada vez.

- Primero se dio cuenta de que es sencillo encontrar 7×2 . ¿Cómo te parece que lo pensó?
- después pensó: "Como 4×2 es 8, entonces hago $7 \times 4 + 7 \times 2$ y encuentro 7×6 ". Es correcto el razonamiento? Explicá por qué.
- Adrián le mostró que $7 \times 4 + 7 \times 2 = 7 \times 6$. ¿Cómo pensás que se lo explicó Adrián?
- Para encontrar 7×3 , buscó la mitad de 7×6 . ¿Es correcto lo que hizo? ¿Por qué?
- Escribí en cada columna el resultado y el cálculo correspondiente que hizo Mariano y completá la tabla.

7×4	7×2	7×6	7×8	7×3	7×5	7×7	7×9	7×1	7×10
28		42							
ya lo sabía		pues $7 \times 6 = 7 \times 4 + 7 \times 2$		la mitad de 7×6					

Cuarto anexo. Registro de una clase de proporcionalidad en sexto año Primera clase

La maestra propone el trabajo en pequeños grupos de 4 personas como máximo. Inicialmente los niños trabajan discutiendo entre ellos para dar respuesta al problema.
Esta actividad fue desarrollada en un 6° año de la EGB. La maestra no había "explicado" proporcionalidad.

Problema: "Si una barra de cereales de 22 g contiene 3,5 g de materia grasa, ¿cuánta materia grasa contiene una barra del mismo cereal, de 40 g?"

Grupo 1: Ornella, Nariz

$$\textcircled{1} \quad a - \frac{22 \text{ gr}}{3,5} \text{ --- } \frac{40 \text{ gr}}{6,35}$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 18 \\ \hline 285 \\ 35 \\ \hline 635 \end{array}$$

Grupo 2: Mariela, Miriam, Inés

$$\begin{array}{r} 40 \\ +18 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35 \\ +18 \\ \hline 5,3 \end{array}$$

a. Contiene 5,3 gr de materia grasa
b. La q' contiene más es la barra anterior

Grupo 3: Federico, Santiago, Valentín

6,0, le descante por q' yo pienso que le tengo q' bajar los dos 5 por q' 22+22=44 y a cuarenta no llega entonces le descante dos 5 y me queda 6,0...

(6,0, le descante por q' yo pienso que le tengo q' bajar los dos 5 por q' 22+22=44 y a cuarenta no llega entonces le descante dos 5 y me queda 6,0)

En el pizarrón:

Tiene 6,0 gramos de grasa.

Grupo 4: Virginia, Giuliana, Belén

$$\frac{22}{3,5} = \frac{40}{x} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 3,5}{22} = \frac{1400}{22} = 63$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ 3,5 \\ \hline 200 \\ 1200 \\ \hline 1400 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1400 \overline{) 22} \\ 080 \\ \hline 140 \\ 0 \end{array}$$

La maestra circula por los grupos sin intervenir en las discusiones. Los grupos presentaron respuestas diferentes. La docente no dice cuál es la respuesta al problema; en cambio, decide poner a consideración de toda la clase los distintos procedimientos. Divide el pizarrón y convoca a algunos niños para que escriban lo que discutieron.

Valentín: 63 no puede ser porque es muy grande.

Docente: ¿Por qué decís que es muy grande?

Valentín: ¿Cómo va a tener 63 gramos de grasa una barra de 40 gramos de cereal?

Giuliana: ¡Me equivoqué en la cuenta! Falta la coma.

Docente: ¿Dónde perdiste la coma?

Giuliana: En la de por.

Docente: Bueno... ¿Cuál será la respuesta al problema? Todos los grupos encontraron que la cantidad de materia grasa es un número cercano a 6, pero hay varias respuestas... ¿Cómo podemos saber cuál es la correcta?

Martín: Por ahí no es ninguna...

Docente: O por ahí es como dice Martín. ¿Qué les parece? ¿Podría asegurar que el resultado es un número cercano a 6?

Federico: Para mí la nuestra está bien.

Docente: Explicá cómo lo pensaron Fede, porque en el pizarrón solamente escribiste el 6.

Federico: Para mí es 6 coma cero, porque si fueran dos barritas de 22 habría 7 gramos de materia grasa...

Tomás: No entiendo.

Federico: ¡Claro! Si tenés una barrita de 22 gramos de cereal, tiene 3,5 de materia grasa; si tenés dos barritas de 22 gramos, hay 3,5 en una y 3,5 en la otra, o sea que hay 7 en total. Si vos le sacás el papel a las barritas y las pegás, tenés una barra más larga de 44 con 7 gramos de grasa (se levanta y dibuja en el pizarrón)



Tomás: Sí, pero vos dijiste que da 6, no 7...

Federico: Porque eso es para una de 44. Pero como es de 40 es un poco menos (borra un pedacito del dibujo que había hecho)



Para mí hay que sacarle el "coma 5" de la barra de 22 gramos, entonces sería 3 más 3. Por eso da 6.

Tomás: Pero a mí me dio 6,6.

Docente: ¿Cómo lo pensaron ustedes, Tomás?

Tomás: Hicimos la regla de tres simple.

Docente: ¿Cómo es eso? ¿Se lo podés explicar a los chicos que no la conocen?

Tomás: Vos ponés el planteo así y después tenés que hacer éste por éste dividido éste (va señalando a medida que habla).

Ana: ¡Ah! Mi mamá me lo explicó....

Valentín: Pero ¿por qué hacés esas cuentas?

Tomás: Porque es así.

Valentín: No entiendo por qué es así...

Docente: A Tomás le enseñaron que los problemas podían resolverse con esa regla, ¿no es cierto? Vamos a tratar de entenderla. Pero primero vamos a seguir mirando un poquito más lo que pensaron otros grupos. A ver, Giuliana, Virginia y Belén también usaron esta regla, ¿no?

Giuliana: Sí.
 Docente: Pero los dos grupos usaron la misma regla y les dio distinto... ¿qué pasó?
 Virginia: A ver si hicimos bien las cuentas....
 Docente: ¿Alguien tiene calculadora? Porque esas cuentas son un poco incómodas... a ver.
 Naryís: Yo...
 Docente: Virginia, dictale a Naryís las cuentas que tiene que ir haciendo.
 Virginia: 40 por 3,5 dividido 22.
 Naryís: Da 6,3636364
 Laura: ¿Nos equivocamos nosotros?
 (revisa las cuentas y corrige la división)
 Naryís: A nosotras nos dio cerca...
 Docente: ¿Podés explicar cómo lo pensaron? ¿Usaron la regla de tres simple también?
 Ornella: No. Nosotras hicimos 3,5 por 18.
 Docente: ¿Y por qué usaron el 18? ¿De dónde vino ese número?
 Ornella: Porque 22 más 18 es 40.
 Docente: Ah, como el de las chicas (referencia a otro grupo). Pero ellas sumaron, no multiplicaron.
 Valentín: ¡Pero 3,5 más 18 no puede dar 5,3! ¡Estás sumando más de 10!
 Docente: ¿Qué dicen ustedes, chicas?
 Mariela: Ah, lo hicimos con la coma....
 Valentín: Si sumás te da 21,5.... no puede tener eso de grasa.... es mucho.
 Bruno: Sí, es la mitad casi....
 Federico: Mitad de grasa y mitad de cereal...
 Docente: Parece que sumando nos da algo que no puede ser.... ¿Pero multiplicando sí? ¿Por qué multiplicaron por 18?
 Ornella: No sé... nos pareció que era así...
 Docente: Bueno, todavía nos queda la intriga. Ahora va a tocar el timbre y vamos a irnos al recreo con esta pregunta. Cuando volvamos, vemos si podemos seguir pensando.

Segunda hora

Docente: En la hora anterior vimos que había varias posibles respuestas al problema, pero no pudimos saber cuál era correcta, o si ninguna estaba bien. Después de lo que explicó Fede parece que el número que estamos buscando tendría que ser cercano a 6, pero hay muchos números cercanos a 6, y casi todas las respuestas cumplen con esta condición. Vamos a ir anotando lo que sí sabemos seguro: si en lugar de ser una barra de 40 gramos fuera de 44, entonces sería fácil porque es el doble de 22. Es como el dibujo de Fede de las dos barritas pegadas.

Dibuja y escribe en el pizarrón:



Dibuja y escribe en el pizarrón:

Peso de la barra de cereal	22	44
Cantidad de materia grasa	3,5	7



Puedo pensar en cortar la barrita a la mitad también... ¿Cuántos gramos de cereal habría?

Varios: ¡Once!

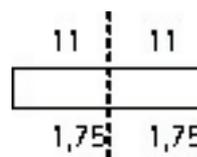
Docente: ¿Y de grasa?

Valentín: ¿Cuánto es la mitad de 3,5?... 1 y algo...

Narys: 1,75

Docente: Lo puedo agregar a la tabla...

Peso de la barra de cereal	22	44	11
Cantidad de materia grasa	3,5	7	1,75



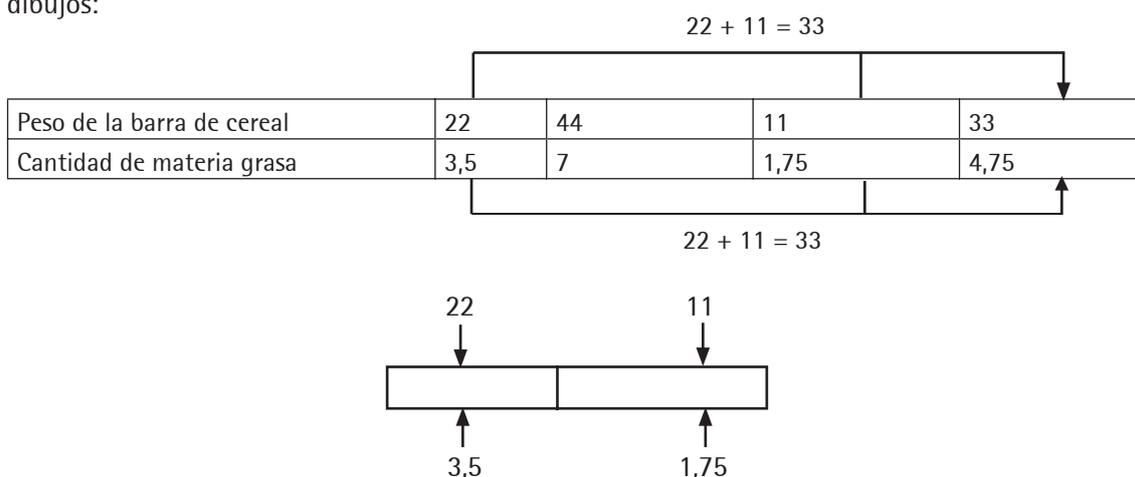
Valentín: Podríamos hacer 22 más 11 para tener 33...

Docente: ¿Y cuánta grasa tendría?

Valentín: 3,5 más 1,75... uy... ¿tenés calculadora?

Narys: 4,75

La docente agrega el valor nuevo en la tabla y registra cómo lo encontraron usando flechas y dibujos:



Federico: Si me dicen cuánta grasa tienen 4 gramos de cereal, lo puedo restar a 44 y me daría para 40.

Docente: ¿Cómo hacemos para saber eso? Ustedes habían dicho que le sacaban el "coma 5" a la de 22. ¿Me sirve? ¿Cómo sé si está bien?

Valentín: No... no sé...

Laura: Podemos saber cuánta grasa hay en un gramo.

Docente: ¿Cómo harías?

Laura: 3,5 dividido 22.

Docente: ¿Por qué dividís por 22?

Bruno: Como si fuera un chocolate... lo partís en 22 pedacitos...

Docente: (empieza a dibujar lo que dijo Bruno) ¿Como en las fracciones, decís?

Bruno y varios: ¡Sí!

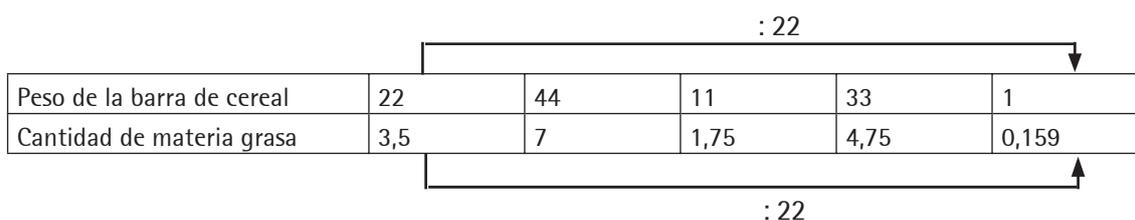
Bruno: Ahora tenés 22 barritas de 1 gramo y querés ver cuánta grasa tiene cada una. Por eso dividís por 22.

Narys: Es 0,159090909

Docente: A ver, lo voy a agregar a la tabla... ¿Escribo todos los decimales?

Valentín: No... poné hasta el 9 porque se repite después.

La docente agrega el valor nuevo en la tabla y registra cómo lo encontraron usando flechas.



Docente: Pero todavía no tengo respuesta... ¿cómo sigo? Ya me perdí... ¿cuál era la pregunta?

Federico: Queríamos saber cuánta grasa había en 4 gramos de cereal.

Docente: ¿Y cómo hago? ¿Me sirve lo que calculamos para saber eso?

Laura: Multipliqué por 4.

La docente lo agrega a la tabla.

Valentín: Y ahora hacés 44 menos 4.

La docente registra en el pizarrón:

$44 - 4 = 40$

Peso de la barra de cereal	22	44	11	33	1	4	40
Cantidad de materia grasa	3,5	7	1,75	4,75	0,159	0,636	?

Docente: ¿Y abajo qué pongo?

Santiago: Tenés que hacer 7 menos 0,636. La misma cuenta abajo y arriba.

Tomás: Pero arriba no hiciste esa cuenta... hiciste 44 menos 4...

Federico: No... él dice que tiene que restar en los dos lados.

Docente: La misma operación abajo y arriba (agrega la cuenta que dijo Santiago debajo de la flecha inferior)

Narys: Da 6,36.

Laura: Igual, si tenés la grasa de 1 gramo podés saber la cantidad de grasa para 40 gramos directamente.

Valentín: Sí, porque multipliqué por 40.

Docente: ¿Así?

(escribe)

x 40

$x 40$

Peso de la barra de cereal	22	44	11	33	1	4	40
Cantidad de materia grasa	3,5	7	1,75	4,75	0,159	0,636	?

Docente: ¿Y da lo mismo?

Narys: Sí... es 6,36

Valentín: Ah, pero también podías multiplicar lo de 4 gramos por 10... así te da 40...

x 10

x 10

La docente vuelve a anotar:

$x 10$

Peso de la barra de cereal	22	44	11	33	1	4	40
Cantidad de materia grasa	3,5	7	1,75	4,75	0,159	0,636	?

Narys: Da lo mismo.

(el timbre tocó hace unos minutos)

Docente: Seguimos la clase que viene.

Segunda clase

Docente: Ayer estuvimos discutiendo para ver cómo se resolvía un problema. ¿Alguien me puede contar de qué se trataba? Juan ayer no vino, así que podemos contarle a él.

Ana: Nos dijeron que había una barra de cereal de 22 gramos y tenía 3,5 gramos de grasa. Nos preguntaban cuánta grasa habría en una barrita de 40 gramos.

Docente: ¿Y qué respondieron?

Ana: La respuesta era que tenía 6,36 gramos de grasa.

Docente: Pero ¿cómo llegamos a la respuesta? ¿Les salió a todos enseguida? ¿Cómo se les ocurrió?

Ana: No... primero lo hicimos en grupos y después entre todos discutimos para ver si estaba bien lo que habíamos pensado.

Docente: ¿Alguien se acuerda cómo fue que pudimos responder?

Tomás: Nosotros y otro grupo ya habíamos respondido bien. Bah, nosotros nos equivocamos en una cuenta, pero después la corregimos y estaba bien.

Docente: ¿Y cómo sabían que era correcta su respuesta?

Tomás: Porque había que usar la regla de tres simple.

Valentín: Pero yo no la usé a esa regla... al final no la explicaste (a la docente).

Docente: Hoy vamos a estudiarla un poquito. Pero vos decís que no la usaste... ¿cómo hiciste entonces para resolver, si Tomás dice que había que usar esa regla?

Valentín: Yo lo pensé distinto. Igual no estaba todo bien lo que habíamos dicho.

Docente: Bueno, ¿pero algunas cosas te sirvieron?

Valentín: Sí. Porque empezamos por cosas más fáciles que lo que nos preguntaban, y después pensamos en algo más difícil.

Bruno: Hicimos el dibujo de la barrita de cereal y entonces veíamos qué pasaba si teníamos dos barritas, o una y media, o la mitad de una... todo así. Entonces íbamos sabiendo la grasa en partes más chiquitas o en barras más grandes.

Santiago: Sí. Fede dibujó dos barras juntas y dijo que había 7 gramos de grasa; después si partíamos a la mitad la barra de 22 gramos, también había la mitad de grasa.

Docente: Además del dibujito usamos unas tablas, ¿se acuerdan? Vamos a escribirlas en el pizarrón:

(escribe las tablas y las flechas a medida que habla)

Santi había dicho que la misma operación que hacíamos con los números de arriba los hacíamos con los números de abajo. Si poníamos 44, porque duplicamos el 22, abajo duplicamos el 3,5; si ponemos 11 porque calculamos la mitad de 22, entonces también calculábamos la mitad de 3,5.

Valentín: También podíamos sumar. Hicimos 22 más 11 para tener una barra de 33 gramos.

Docente: ¿Y la grasa?

Valentín: Teníamos que sumar 3,5 más la cantidad de grasa de la de 11 gramos, que es ese 1,75 que pusiste ahí.

Laura: También si sabíamos cuánta grasa había en una barrita de 1 gramo, después podíamos saber cuánta grasa había en cualquier barra, porque podemos multiplicar.

Docente: A ver.. estamos diciendo muchas cosas muy importantes acá. Vamos a escribirlas para no olvidarnos:

- Si dividimos la barra a la mitad, entonces la cantidad de grasa también va a ser la mitad (dibujo al lado)
- Si duplicamos la barra de cereal, entonces vamos a tener el doble de grasa (dibujo al lado)

¿Y si triplicamos la barra?

Federico: Es como tener tres barritas... tenés tres veces de grasa.

- Si triplicamos el cereal, triplicamos la cantidad de grasa (dibujo al lado)

Podemos seguir... Así que si aumenta la cantidad de cereal, la cantidad de materia grasa aumenta de la misma manera, ¿no? Y si disminuye la cantidad de cereal, la cantidad de grasa también disminuye de la misma manera. En Matemática decimos que la cantidad de cereal y la cantidad de grasa varían, van cambiando, proporcionalmente (escribe: "LA CANTIDAD DE CEREAL Y LA CANTIDAD DE GRASA VARIAN PROPORCIONALMENTE")

- Si conozco la cantidad de grasa que hay en un gramo de cereal puedo calcular la cantidad de grasa que hay en cualquier cantidad de cereal, multiplicando.

- Si sumo dos cantidades de cereal, también debo sumar las cantidades de grasa. Si resto dos cantidades de cereal, también debo restar las cantidades de grasa.
- Puedo usar la regla de tres simple.

(Queda escrito en el pizarrón)

Vamos a ver si estas conclusiones a las que llegamos con el trabajo de ayer nos sirven para resolver otros problemas.

Propone el trabajo en grupos, como en la clase anterior. Reparte una hoja a cada grupo con los siguientes problemas:

1. En un almacén, 5 kg de café valen \$30.
 - a. ¿Cuánto valen 20 kg de ese mismo café?
 - b. ¿Cuánto valen 14 kg de ese mismo café? ¿Y 37 kg?
 - c. ¿Cuántos kg de ese café puedo comprar con \$45?
2. Jorge tiene 6 años y pesa 15 kg. ¿Cuánto pesará cuando tenga 60 años?
3. Un chico tiene \$60 ahorrados. Quiere hacer algunos cálculos para saber cuánta plata puede gastar por día en sus vacaciones. Él pensó que si se va 10 días, suponiendo que todos los días gasta la misma cantidad, podrá gastar \$6 cada día. ¿Cuánto podrá gastar si se va 5 días?
4. Sofía gana \$14 cada dos días que ayuda a su abuelo en la tienda. ¿Cuánto dinero ganó en total si trabajó los cinco días hábiles de esta semana?
5. Marcelo mide 90 cm, el doble que Joaquín. ¿Cuánto medirá Marcelo cuando Joaquín mida 135 cm?

Capítulo 3

Anexo único. Repitan conmigo: ¡No se puede dividir por cero!¹

Imaginen que entran a un negocio donde toda la mercadería que se puede comprar cuesta mil pesos. Y ustedes entran justamente con esa cantidad: mil pesos. Si yo les preguntara. ¿cuántos artículos pueden comprar? Creo que la respuesta es obvia: uno solo. Si en cambio en el negocio todos los objetos valieran 500 pesos, entonces, con los mil pesos que trajeron podrían comprar, ahora, dos objetos.

Esperen. No crean que enloquecí (estaba loco de antes). Siganme en el razonamiento. Si ahora los objetos que vende el negocio costaran sólo un peso cada uno, ustedes podrían comprar, con los mil pesos, exactamente mil artículos.

Como se aprecia, a medida que disminuye el precio, aumenta la cantidad de objetos que Uds. pueden adquirir. Siguiendo con la misma idea, si ahora los artículos costaran diez centavos, ustedes podrían comprar...diez mil. Y si costaran un centavo, sus mil pesos alcanzarían para adquirir cien mil.

O sea, a medida que los objetos son cada vez más baratos se pueden comprar más unidades. En todo caso, el número de unidades aumenta tanto como uno quiera, siempre y cuando uno logre que los productos sean cada vez de menor valor.

Ahora bien: ¿y si los objetos fueran gratuitos? Es decir, ¿y si no costaran nada? ¿cuántos se pueden llevar? Piensen un poco.

Se dan cuenta que si los objetos que se venden en el negocio no costaran nada, tener o no tener mil pesos poco importa, porque ustedes se podrían llevar todo. Con esta idea en la cabeza es que uno podría decir *que no tiene sentido "dividir" mil pesos entre "objetos que no cuestan nada"*. En algún sentido los estoy invitando a que concluyan que *no tiene sentido dividir por cero*.

¹ Paenza, A., *Matemática... ¿estás ahí?* Buenos Aires, Siglo XXI, 2005.

Más aún: si se observa la tendencia de lo que acabamos de hacer, pongamos en una lista la cantidad de artículos que podemos comprar, en función del precio.

Precio por artículo	Cantidad a comprar con mil pesos
\$1.000	1
\$500	2
\$100	10
\$10	100
\$ 1	1.000
\$0,1	10.000
\$0,01	100.000

A medida que disminuye el precio, aumenta la cantidad de artículos que podemos comprar *siempre con los mil pesos originales*. Si siguiéramos disminuyendo el precio, la cantidad de la derecha seguiría aumentando... pero, si finalmente llegáramos a un punto en donde el valor por artículo es *cero*, entonces la cantidad que habría que poner en la columna de la derecha, sería...

Moraleja: no se puede dividir por cero.

Repitan conmigo: ¡no se puede dividir por cero! ¡No se puede dividir por cero!