Dirección General de
Cultura y Educación
Buenos Aires
LA PROVINCIA

El diseño curricular en la escuela: Matemática

DOCUMENTO DE TRABAJO
Curso a Distancia

Educación Primaria

Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educacion Superior y Capacitación Educativa
Dirección de Capacitación

Índice

Presentación ……………………………………………………………………..… 1

Introducción ………………………………………………………………………… 2

Unidad 1.
Aspectos generales referidos al enfoque de enseñanza ……………………… 6

Unidad 2.
El abordaje didáctico de la multiplicación y la división ………………………… 10

Unidad 3.
Secuenciación de contenidos. Avances sobre el campo multiplicativo ……… 59

Bibliografía ……………………………………………………………………….. 70

Autora: Beatriz Ressia de Moreno

Este material se basa en su mayoría en el Documento de Formación de Capacitadores realizado en febrero de 2007 por Crippa, Ana Lía; Moreno, Beatriz R. de; Novembre, Andrea, en el programa “Capacitando en la escuela”. Proyecto: Enseñar a estudiar matemática.

Lectura: Ana Lía Crippa y María Emilia Quaranta

Agradecemos la participación y los aportes de los siguientes integrantes de los equipos técnicos regionales en la elaboración de este documento:
Ana Barone / Teresita Chelle / Patricia García / Silvia Palavecino / Cristina Piermattei /
Marcos Varettoni

Presentación

Estimados colegas:

Quiero presentarles el material de trabajo de la capacitación en servicio del primer semestre del año 2009. Es el resultado de una propuesta de la Dirección de Capacitación, en acuerdo con las direcciones provinciales de los niveles Inicial, Primario y Secundario, los equipos técnicos regionales y –en las reuniones de cogestión– los representantes gremiales del sector.

Nuestro plan general de capacitación está basado en varias líneas: Educación Inicial, Educación Primaria, Educación Secundaria, Educación Técnico Profesional y Cultura, Ciencia y Construcción de Ciudadanía. Cada una de ellas, con sus respectivas modalidades, tiene seis ejes de referencia: inclusión, alfabetización, evaluación, diseños curriculares, gobierno del sistema y relación con la producción y el trabajo. La presente propuesta aborda específicamente el eje de diseños curriculares para los niveles de enseñanza obligatorios.

Estamos respondiendo al derecho de los docentes de trabajar sobre las rutinas del aula en un espacio y tiempo común, con el propósito de intercambiar ideas y prácticas acerca de las diferentes disciplinas y los nuevos diseños curriculares de todos los niveles.

A partir del mes de febrero habrá 751 capacitadores trabajando en los 135 Centros de Investigaciones Educativas distribuidos en los distritos de la Provincia, junto con más de 90.000 docentes por semestre.

Se trata de un plan que apunta a consolidar y actualizar la cultura general de nuestros maestros. El objetivo es que en la escuela se recree un clima de vida cultural, actualidad científica y discusión política para que podamos vincularnos mejor con la complejidad y los cambios del mundo en el que nos toca vivir y enseñar.

Desde ya, muchas gracias por el compromiso que asumen como ciudadanos y trabajadores.

Prof. Mario Oporto
Director General de Cultura y Educación
Provincia de Buenos Aires

Introducción

Esta propuesta de capacitación a distancia constituye un acercamiento al nuevo Diseño Curricular de Matemática para la Escuela Primaria.

Intentamos presentar algunas de las ideas centrales del enfoque para la enseñanza de la Matemática, especialmente referidas a la enseñanza de la multiplicación y la división, así como también propuestas para las aulas y su análisis didáctico.

Debido a que este trabajo está planteado desde un enfoque particular acerca de qué significa aprender, enseñar y hacer matemática, en un primer momento proponemos realizar un trabajo que permita vivenciar ese quehacer y reflexionar acerca de sus particularidades y su sentido. Estamos convencidos de que para enseñar a "hacer matemática", es necesario haber pasado previamente por esa experiencia.

Partiendo de los saberes previos de los docentes, analizaremos las concepciones usuales acerca de los sentidos de estos saberes a la luz de la caracterización de dicho quehacer.

Centrándonos en la temática seleccionada, discutiremos acerca de la construcción de saberes en esta disciplina y del rol docente involucrado en esta construcción. Relacionaremos las prácticas de enseñanza que conviven en la escuela con otras maneras posibles de actuar a partir del análisis de producciones de los alumnos, de situaciones de enseñanza, de secuencias de actividades y de registros de clases.

En todos los casos, adoptaremos como marco teórico el enfoque didáctico desde el que se posiciona la jurisdicción.

Objetivos

Con distinto grado de generalidad, y especialmente centrados en la temática seleccionada, se pretende que los docentes participantes puedan:

- interpretar el enfoque acerca de la enseñanza de la Matemática adoptado en el nuevo Diseño Curricular para la escuela primaria;
- actualizar conocimientos disciplinares y didácticos;
- identificar problemas relevantes de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en la educación primaria;
- elaborar herramientas conceptuales que les permitan abordar los problemas identificados;
- revisar críticamente sus prácticas docentes a la luz de marcos teóricos específicos.

Contenidos

Unidad 1. Aspectos generales referidos al enfoque de enseñanza.

Hacer matemática en la escuela: su incidencia en las decisiones didácticas. El rol del problema en la enseñanza de las matemáticas. Los problemas como condición necesaria pero no suficiente para lograr aprendizajes matemáticos: el espacio de la reflexión sobre lo actuado. Organizaciones posibles de la clase e incidencia en los aprendizajes. La gestión del docente y las interacciones en la clase: interacciones entre los alumnos y los problemas, entre los alumnos entre sí, entre los alumnos con el docente. Enseñar a estudiar matemática: diferentes estrategias. Secuencias didácticas: criterios para la elaboración.

Unidad 2. El abordaje didáctico de la multiplicación y la división.

El sentido de la multiplicación y el sentido de la división. Los conocimientos necesarios para abordar la multiplicación y la división y su recuperación: el sistema de numeración y el sentido de los cálculos; relaciones aditivas. Problemas de multiplicación y de división en los primeros años de escolaridad. Distintos procedimientos de resolución. Diferentes problemas de multiplicación y de división. La estructura multiplicativa en cada uno de ellos. El uso de la calculadora como herramienta de anticipación y evaluación.

Unidad 3. Secuenciación de contenidos. Avances sobre el campo multiplicativo.

Secuenciación de contenidos: ejemplos de División. Análisis de las propiedades en cálculos de productos. Extensión de las relaciones multiplicativas a problemas de división. Algunos usos de la calculadora. La gestión de la clase y su incidencia en la construcción de conocimientos matemáticos.

A continuación le presentamos la secuencia temporal en la que hemos diseñado el trabajo:

Modalidad	**Característica**	**Actividades a realizar**	**Fecha y horario**
Trabajo no presencial o autónomo	Trabajo individual o grupal de lectura, análisis y vinculación de contenidos de la Unidad 1 y de parte del Diseño Curricular para la Educación Primaria 2008.	Se analizará el siguiente material de lectura: -unidad 1 del documento de trabajo -Apartado correspondiente al Diseño Curricular para la Educación Primaria 2008. Para ello se propone la realización de todas las actividades propuestas.	
Encuentro presencial	1. Exposición: presentación de los marcos teóricos. 2. Discusión y corrección de las actividades seleccionadas para discutir en el encuentro presencial. 3. Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	1. Debate referido a la exposición teórica 2. Debate referido a la lectura indicada. 3. Revisión de las actividades propuestas en la Unidad 1. 4. Aclaración de las dudas que hayan surgido.	Cuatro horas de duración
Trabajo no presencial o autónomo	Trabajo individual o grupal de lectura, análisis y vinculación de contenidos de la Unidad 2, y del apartado correspondiente al Diseño Curricular para la Educación Primaria2008	Se analizará el siguiente material de lectura: - Unidad 2 del documento de trabajo. - Apartado correspondiente al Diseño Curricular para la Educación Primaria 2008. Para ello se propone la realización de todas las actividades propuestas.	

Encuentro presencial	1. Exposición: presentación de los marcos teóricos. 2. Discusión y corrección de las actividades seleccionadas para discutir en el encuentro presencial. 3. Atención a las consultas y demandas de los capacitandos.	1. Debate referido a la exposición teórica. 2. Debate referido a la lectura indicada 3. Revisión de las actividades correspondientes. 4. Aclaración de dudas que hayan surgido.	Cuatro horas de duración
Trabajo no presencial o autónomo	1. Trabajo individual o grupal de lectura, análisis y vinculación de contenidos de la Unidad 3, del apartado correspondiente al Documento Nº 2 (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB*, provincia de Buenos Aires. 2. Elaboración de la propuesta de evaluación correspondiente a la instancia no presencial.	1. Se analizará el siguiente material de lectura: - Unidad 3 del documento de trabajo - Apartado correspondiente al Documento Nº 2 (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB.* Para ello se propone la realización de todas las actividades propuestas. 2. Revisión de lo realizado hasta el momento y evaluación no presencial.	
Encuentro presencial	1. Discusión y corrección de las actividades seleccionadas para discutir en el encuentro presencial. 2. Reflexión teórica acerca de la evaluación no presencial.	1. Revisión de las actividades correspondientes. 2. Evaluación presencial.	Cuatro horas de duración

Recuerde que este material constituye una propuesta de enseñanza elaborada para lograr los objetivos explicitados, y fue organizado en unidades didácticas que incluyen contenidos y actividades que orientarán el análisis del diseño curricular para la educación primaria. Sugerimos, en la medida de lo posible, una primera lectura de la globalidad del módulo, antes de introducirse con mayor detenimiento en el tratamiento de cada unidad. Para las instancias no presenciales o autónomas le sugerimos que:

- organice su tiempo de lectura y trabajo
- realice una lectura rápida del módulo para tener una percepción global de los contenidos abordados una vez recibido el material.
- no postergue la realización de las actividades propuestas; cada una fue pensada desde una secuencia didáctica para facilitar el proceso de auto capacitación.
- destaque los conceptos que identifique en cada lectura.
- registre los comentarios, cuestionamientos y/o preguntas que le vayan surgiendo, a fin de articular el marco teórico con su experiencia profesional.
- anote las certezas, interrogantes o dudas que se le presenten para poder trabajarlas en los encuentros presenciales.
- al cerrar cada actividad, permítase reflexionar sobre lo leído y propóngase relacionar lo nuevo con lo ya conocido.

En cada unidad encontrará:

- breves referencias sobre los contenidos de Matemática que se abordan en la unidad, que le facilitarán la lectura del Diseño Curricular.

- actividades elaboradas para:

- favorecer y orientar el aprendizaje de los conceptos e ideas desarrolladas en el marco general del diseño curricular y en el capítulo referido a la enseñanza de la multiplicación y la división
- vincular su práctica docente con los conceptos y concepciones analizados.

En las actividades que usted debe resolver se indica si se trata de:

- actividades para revisar durante los encuentros presenciales.
- actividades de autocorrección.
- actividades correspondientes a la evaluación en proceso.

A lo largo del documento, encontrará actividades que requiere de la lectura del Diseño Curricular con sus respectivas referencias. Recuerde que si lo necesita puede recurrir a la biblioteca del CIE.

Los encuentros presenciales son instancias de trabajo grupal, diseñadas para el intercambio y la comunicación entre el docente a cargo de la capacitación y los docentes participantes.

Algunas de las instancias que enriquecen este espacio son el intercambio de ideas, el planteo y la posterior resolución de las dudas surgidas del estudio individual, la construcción de grupos de estudio para analizar los contenidos y la discusión de las distintas formas en que se resuelven las actividades de aprendizaje.

Estos encuentros también constituyen espacios para desarrollar contenidos no incluidos en este material impreso, que se sostienen con las actividades y lecturas que cada cursante vaya realizando, y que son propuestas en las instancias de trabajo autónomo previas al encuentro. Son los cursantes con sus inquietudes, preguntas, comentarios, los que irán enriqueciendo el encuentro junto con el docente, otorgándole así una dinámica particular.

Es aconsejable que los grupos de estudio funcionen también en los momentos de trabajo autónomo para intercambiar experiencias, trabajar cooperativamente y relacionarse con otros cursantes que enriquecerán su aprendizaje y su desempeño, laboral en el aula y en su institución.

El CIE será el encargado de atender las cuestiones operativas en lo que hace a la implementación del curso, y es con el podrá comunicarse cuando necesite información respecto de las fechas y horarios de los encuentros presenciales, las fechas de entrega de trabajos, las cuestiones relativas a los materiales de estudio, etcétera.

Unidad 1

Aspectos generales referidos al enfoque de enseñanza

La siguiente actividad es un principio de descripción del tipo de quehacer matemático al que adherimos.

> **Actividad 1** (de autocorrección)
> Antes de continuar con la lectura del módulo, le pedimos que resuelva la siguiente actividad.
> Para resolver el siguiente problema, puede utilizar cualquier operación matemática *excepto la división*. Registre detalladamente cómo llega a encontrar la respuesta.
> En una fábrica hay 3587 caramelos para envasar en paquetes de 12. ¿Cuántos paquetes pueden armarse?

Suele resultar sorprendente que se pida resolver un problema que "es de división" sin dividir. Pero esta afirmación es una de las cuestiones que queremos discutir. Si bien el problema se puede resolver con una división, también se puede resolver con restas, sumas, multiplicaciones, o bien mediante una combinación de operaciones.

Es interesante destacar que este es un ejemplo, entre otros, del tipo de quehacer matemático que estamos considerando. Un mismo problema puede ser resuelto por diferentes operaciones y una misma operación, resuelve distintos problemas.

Algunas de las estrategias que se pueden producir.

- Si cada paquete tiene 12 caramelos, se puede sumar 12 hasta llegar a la cantidad total de caramelos o lo más cerca posible: 12 + 12 + 12 +…. hay que tener en cuenta que cada 12 que se suma corresponde a 1 paquete, por lo cual hay que registrar la cantidad de veces que se suma.
- Puede restarse 12 tantas veces como sea posible al total de caramelos: 3587 – 12 - 12 -… Nuevamente, hay que tener en cuenta que cada 12 que se resta corresponde a 1 paquete de caramelos. Además, hay que restar 12 hasta que no se pueda restar más (o bien porque se llegó a 0 o a un número menor que 12).
- Los valores elegidos hacen que sumar o restar se torne arduo, y es aquí cuando la multiplicación aparece como un método que permite "resumir" los dos anteriores en menor cantidad de pasos.
  Si se arman 100 paquetes, se usan 100 × 12 = 1200 caramelos. Quedan, entonces, 3587 – 1200 = 2387.
  100 paquetes más son nuevamente 1200 caramelos.
  Quedan 2387 – 1200 = 1187.
  No alcanza para armar 100 paquetes más. Si para 100 paquetes se usan 1200 caramelos, para 50 se usan la mitad, 600, y para 10 la quinta parte,
  600 ÷ 5 = 120. Para 90 paquetes se necesitan 1200 – 120 = 1080, luego:
  1187 – 1080 = 107
  107 caramelos alcanzan para menos de 10 paquetes: 120 – 12 = 108,
  108 – 12 = 96, es decir que se pueden armar 8 paquetes:
  107 – 96 = 11
  En total se armaron 100 + 100 + 90 + 8 = 298 paquetes y sobraron 11 caramelos.
  Este desarrollo corresponde a una división resuelta de una manera diferente al algoritmo tradicional, realizando una aproximación a través de productos, lo cual permite seguir paso a paso lo que se resuelve.

Actividad 2 (para discutir en el encuentro presencial)
Describa el trabajo matemático que desarrolló al resolver el problema anterior y compárelo con el trabajo que se hubiera requerido en el caso de haber usado la división.

Actividad 3 (para discutir en el encuentro presencial)
Lea el extracto correspondiente al Diseño Curricular *Consideraciones generales sobre la enseñanza de la matemática en la escuela primaria* y luego:

- explicite los aspectos que se pusieron en juego en la resolución del problema de la actividad 1.
- en relación con el mismo, haga un punteo de sus acuerdos y desacuerdos acerca de qué se entiende por actividad matemática.

Sin avanzar con la lectura del módulo realice la siguiente actividad:

Actividad 4 (de autocorrección)
Realice un punteo acerca de:
- ¿Cuándo es posible afirmar que un alumno maneja el concepto de multiplicación?
- ¿Cuándo es posible afirmar que un alumno maneja el concepto de división?

Desde nuestra perspectiva, un alumno maneja el concepto de multiplicación si es capaz de resolver los problemas referidos a todos los sentidos de este objeto. Lo mismo es posible afirmar para el concepto de división.

Es decir, un alumno que domina el algoritmo de la multiplicación o de la división pero no puede tomar decisiones acerca de en qué tipo de problemas ese procedimiento es herramienta de resolución, es un alumno que, desde nuestra perspectiva, no sabe multiplicar o no sabe dividir.
Es muy frecuente que se confunda el dominio del concepto de esas operaciones con el dominio de los algoritmos; es decir, el "qué" con el "cómo". Es nuestra intención poner en el centro de la discusión, que el dominio de cada algoritmo no siempre posibilita decidir si cada una de esas operaciones es o no una herramienta para resolver un problema determinado. Esto nos lleva al punto central de este enfoque.

Para que haya aprendizaje es imprescindible la existencia de la necesidad de un nuevo conocimiento o la necesaria adaptación de un conocimiento antiguo cuando deje de ser adecuado. En este sentido, el problema planteado a los alumnos generará conocimientos si es consistente, si "resiste", si los alumnos tienen que "reflexionar", "pensar", "anticipar", conjeturar, decidir autónomamente con qué "cuenta" o procedimiento es posible resolverlo, poner a punto esas estrategias y ensayar, poner a prueba y comunicar estos ensayos; si además puede aportar retroacciones, es decir, informar a los alumnos de la validez de sus propuestas.

Si "saber" acerca de la multiplicación y de la división consistiera básicamente en dominar las cuentas, y por lo tanto la propuesta de enseñanza se basara en su práctica, ¿cómo se podría llevar adelante el trabajo matemático descrito?

Actividad 5 (para discutir en el encuentro presencial)
Utilice el siguiente párrafo para argumentar acerca de la necesidad de elaborar "secuencias de enseñanza", y registre lo producido para aportar a la discusión en el encuentro presencial.

"... los problemas no funcionan como motor de producción de conocimientos por sí mismos. Es preciso un trabajo sistemático de varias clases próximas en torno a un recorte de problemas para que los alumnos puedan reorganizar una y otra vez sus estrategias de resolución, pensar nuevamente en las relaciones que aparecieron en clases anteriores, abandonar ensayos erróneos e intentar nuevas aproximaciones".[1] (Diseño Curricular para la enseñanza de la matemática en la EP 2008)

Desde la perspectiva didáctica que nos orienta, proponemos enseñar generando relaciones entre los saberes; esto es más productivo en términos de aprendizaje que la enseñanza de saberes aislados. Sabemos que la construcción de los conocimientos matemáticos vinculados a la multiplicación y a la división, se produce a largo plazo y cubre un abanico de aspectos relacionados entre sí. Por ello, la planificación de la enseñanza deberá contemplar esta condición.

Por otra parte, la apropiación de los conocimientos por parte de los alumnos necesita de tiempos que van a ser diferentes en todo grupo y en cada alumno. Los niños no son expertos en sus primeros acercamientos a los contenidos, necesitan poder tomar contacto más de una vez para que la apropiación tenga sentido.

Además, proponer una o algunas actividades recortadas y aisladas para abordar un contenido, no permite a los alumnos identificar el alcance del mismo, es decir, determinar cuál es el campo de utilización, qué diferentes problemas que apelan a diferentes aspectos del sentido de dicho concepto permiten resolver.

También la enseñanza de conceptos a través de actividades sueltas, aisladas entre si, dificulta el establecimiento de relaciones entre lo que se sabe y lo que es necesario aprender, generando conocimientos a la manera de compartimentos estancos, desvinculados entre si.

Intentamos producir "redes" de conocimiento que faciliten y permitan apoyarse en lo que se sabe para descubrir y construir lo que no se sabe. Para que esto sea posible, es necesario apelar de manera permanente a los conocimientos pasados, que "se discutan" y sean interrogados a la luz de lo que se acaba de aprender. El edificio matemático está en perpetua obra y en consecuencia, las evaluaciones deben ser diferidas en relación al momento de aprendizaje inicial.

Es necesario entonces planificar secuencias de trabajo que contemplen un tiempo de elaboración, de uso de un contenido. La idea de secuencia apunta a la articulación de las propuestas, para que cada momento del trabajo constituya un punto de apoyo para el siguiente, y éste a su vez retome y avance en algún sentido sobre el anterior.

Estas ideas se sustentan en que los conceptos se elaboran en la interacción con un conjunto de problemas que les dan sentido. Habrá entonces que seleccionar el conjunto de problemas que el concepto permite resolver, dado que un mismo concepto matemático permite resolver diferentes problemas. Esta cuestión será retomada igualmente mas tarde.

Lo dicho anteriormente requiere que el docente utilice la planificación como una herramienta fundamental para poder instalar este tipo de trabajo. En ella el docente tendrá que tomar decisiones sobre la progresión compleja del contenido a tratar, en función de las características del grupo, sus conocimientos previos, etc. El avance en dicha complejidad se realiza través de opciones y modificaciones que el maestro realiza en cada situación: elecciones respecto del tipo de situación, del contexto, de las cantidades en juego, de las restricciones introducidas, de los diferentes aspectos del sentido de dicho concepto a los que apelan los problemas, etc.

Estas opciones, sumadas a un conjunto de intervenciones del docente, favorecerán cambios en los procedimientos de resolución de los alumnos y en su relación con los conocimientos.

En síntesis, el aprendizaje no es un proceso lineal ni se puede imponer un mismo tiempo para cada uno de los alumnos. Es necesario que la organización del tiempo de los aprendizajes

[1] DGCyE, *Diseño curricular para la educación primaria.* La Plata, DGCyE, 2007.

contemple largos plazos para el tratamiento de los contenidos (en oposición a un tratamiento mediante actividades aisladas); también sucesivas revisitas sobre el mismo contenido con problemas similares u otros diferentes, de modo de brindar a los alumnos nuevas oportunidades de avanzar sobre la elaboración de dichos conceptos, o de construir lo que no han podido hasta ahora. En otros términos, a lo largo del año, se promoverán nuevas “visitas” sobre el mismo concepto desde diferentes puntos de vista recuperando lo trabajado anteriormente.

Actividad 6 (ítem correspondiente a la evaluación de proceso)

1. En función de la lectura del apartado “Consideraciones generales sobre la enseñanza de la matemática en la escuela primaria”, correspondiente al Diseño Curricular para la Educación Primaria, establezca relaciones con lo abordado hasta aquí.
2. Identifique los conceptos que considere más importantes retener para aportar, discutir, aportar y compartir, etc. en los futuros encuentros presenciales.

Unidad 2

El abordaje didáctico de la multiplicación y la división

La enseñanza de la multiplicación

En esta unidad se abordarán los problemas de la multiplicación en los primeros años de escolaridad y sus distintos procedimientos de resolución.

De la misma forma en que los problemas de la división pueden ser resueltos sin utilizar la división, los problemas "de multiplicar" pueden resolverse sin multiplicar. Algunos de estos problemas pueden presentarse a los alumnos desde primer grado, y en relación con diversos objetivos.

Por un lado, generar condiciones propicias en el aula para abordar conocimientos y actitudes vinculados al quehacer matemático, a la tarea de resolver problemas y al análisis de los mismos. Se trata de que los alumnos puedan interpretar situaciones nuevas para las cuales no tienen un recurso experto, y desarrollen confianza en su posibilidad de construir estrategias personales válidas que podrán ser comparadas buscando similitudes y diferencias, juzgando su validez, analizando su economía, etc. En segundo lugar, la inclusión de este tipo de problemas apunta a promover el estudio en sí mismo de situaciones multiplicativas y su diferenciación con el campo de los problemas aditivos; estudio evidentemente provisorio que exigirá progresivos acercamientos en años siguientes.

Queremos proponer la reflexión acerca de una de las dificultades que presenta la tarea de resolver problemas y el consiguiente análisis. Se trata de la posibilidad de identificar las relaciones que el problema informa, a veces de manera explícita y otras de manera implícita. De hecho, muchas veces en el enunciado de un problema o en una consigna, no se evidencia "qué es lo que hay que hacer" para poder dar alguna respuesta.

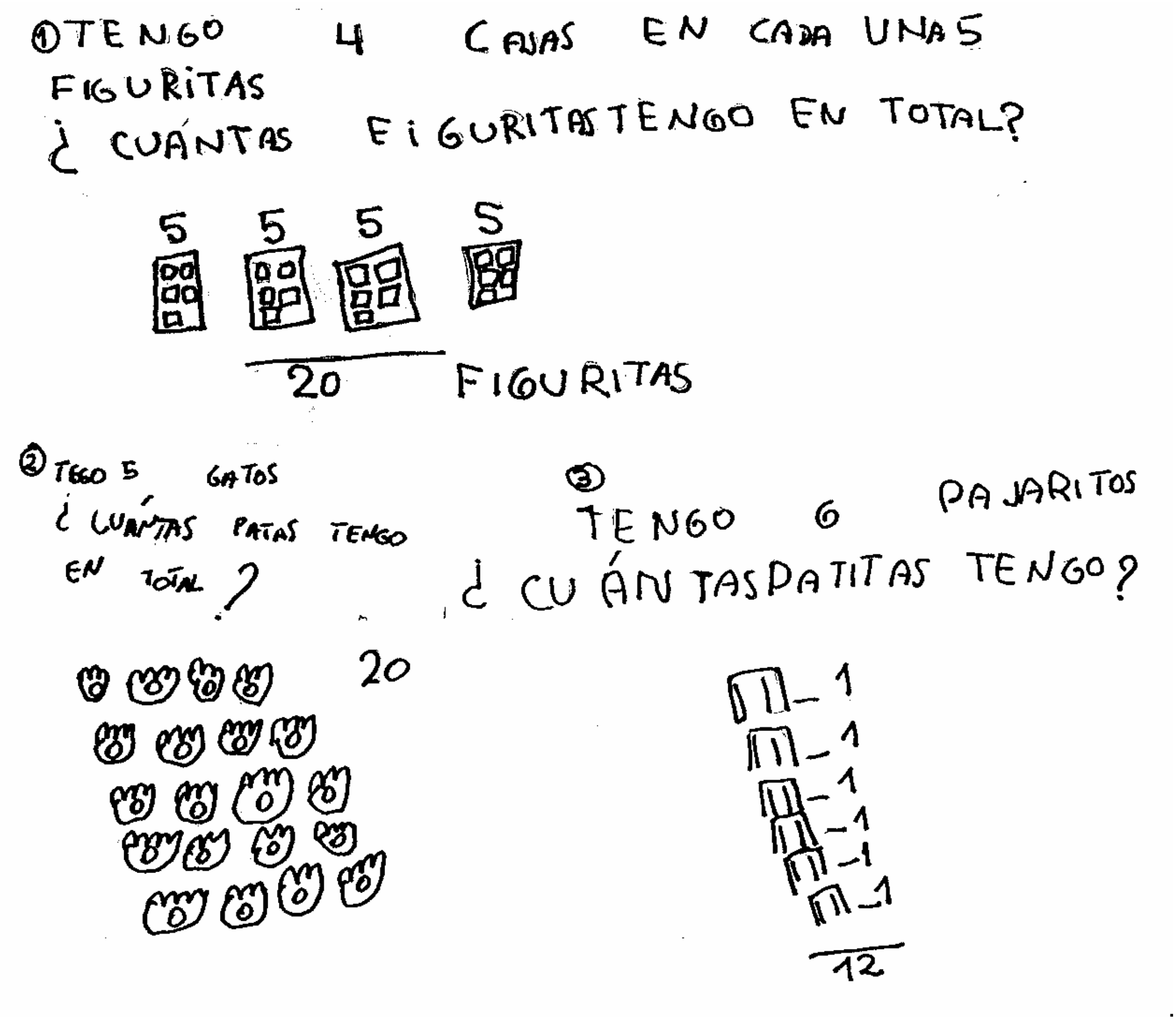
Parte de la actividad matemática será identificar qué se puede desplegar a propósito de los problemas que se pongan en funcionamiento; despliegue que se caracteriza por ser de tipo exploratorio: requiere probar, ensayar, abandonar, conjeturar, etc.

Si la enseñanza de la multiplicación se restringe al algoritmo convencional, los alumnos pierden la posibilidad de desarrollar esta actividad y de analizar el campo de problemas que se pueden resolver con el producto. Es así que no reconocen cuando un problema "es de por" y buscan indicios externos, generalmente palabras claves en el enunciado del problema o a través de las indicaciones externas que brinda el maestro frente a la pregunta: *¿es de más, de menos o de por?.*

Frente a problemas como "¿Cuántas patas tienen 6 perros?", "¿Cuántas figuritas hay en 4 paquetes si en cada uno hay 5 figuritas?, los procedimientos más frecuentes que elaboran los alumnos cuando se los pone a resolver sin darles indicaciones que orienten a utilizar la cuenta, son los dibujos y luego el conteo de cada uno de los elementos o el conteo oral y la escritura del resultado. Otros niños utilizan marcas (rayitas) y registran los resultados parciales acumulativos. Y aparecen también cálculos de sumas reiteradas.

Entre los procedimientos de alumnos de 1º grado pueden aparecer los siguientes[2]:

[2] DGCyE, *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB*. La Plata, DGCyE, 2001.



Un error típico en el tratamiento inicial de estos problemas es la utilización de la suma de ambas cantidades involucradas. Por ejemplo, para un problema como “Tengo 4 floreros y en cada uno pongo 6 flores ¿Cuántas flores hay en total?”, muchos alumnos suman el 4 y el 6.

Es bastante habitual que la palabra “total” sea leída por muchos alumnos como un indicador de suma, lo cual hace necesario un trabajo alrededor de esta escritura para considerar que la suma podría ser pertinente para resolver este problema, pero no ésa. Se espera que los alumnos, a partir de las discusiones entre sus pares con la coordinación del maestro, puedan formular expresiones tales como: *podés sumar, pero sumás otros números, en estos problemas se suma muchas veces el mismo número, se puede sumar muchos 6, pero no 6 + 4*, etc.

Las intervenciones del docente, deberían apuntar a establecer las diferencias propias de estas operaciones que permitan a los alumnos construir con sentido el alcance de la validez de las mismas; es decir, en qué caso son una herramienta para resolver y en qué casos no.

En este sentido, las operaciones aditivas (suma y resta) tienen un límite preciso y es que pueden resolver relaciones dentro del mismo universo empírico; o sea, que en el caso del ejemplo, se pueden sumar una cantidad que exprese flores (cualquiera sea esa cantidad), más otra cantidad de flores (cualquiera sea esa cantidad), y como resultado tendremos la cantidad total de flores. Podemos sumar un número que expresa una cantidad de rosas más un número que expresa una cantidad de violetas, y tendremos como resultado un número que expresa la cantidad total de flores. Pero si sumamos una cantidad que indica flores más otra cantidad que indica floreros, el resultado indicaría… ¿floresfloreros?

Aún en caso de que este error no apareciera, es interesante hacer una intervención didáctica específica para incluir el debate alrededor del mismo con la finalidad de que los alumnos expliciten por qué la suma de los dos números que aparecen en el problema, no permite su resolución. Una posible intervención es: "Un alumno de otro primero dijo que este problema se podía resolver con esta suma: 4 + 6, ¿ustedes qué piensan?" Otras posibles intervenciones posteriores para abordar esta distinción podrían ser las siguientes: proponer a los niños que inventen y expresen oralmente problemas para 4 + 6, y que los comparen con éste; analizar con los niños con qué sumas sí puede resolverse este problema y por qué.

Intentamos que los alumnos progresivamente incluyan la idea de que algunos conocimientos son generalizables. Esta manera de hacer matemática, colaborará en la elaboración y utilización de diferentes modelos para resolver distintos problemas. Es decir, la posibilidad de identificar que hay procedimientos que resultan pertinentes para toda una gama de situaciones, que hay representaciones más convenientes según lo que se trata de averiguar, etc.

En síntesis, si bien los primeros procedimientos –y válidos- de los cuales disponen los alumnos para resolver problemas multiplicativos se basan en las operaciones aditivas, la puesta en relación de dos magnitudes diferencia también las operaciones aditivas y multiplicativas. En efecto, se trata de coordinar conjuntos de valores pertenecientes a universos diferentes.

Esta novedad introduce una complejidad nueva para los alumnos. Dentro del trabajo sobre este aspecto, el control del significado de los números en juego es un elemento importante a considerar en las discusiones y las resoluciones colectivas de la clase. Siguiendo con la idea de una secuencia de enseñanza posible para la multiplicación, luego de trabajar durante dos o tres clases con diferentes problemas, se les pueden plantear a los alumnos algunas discusiones con el objetivo de dar la oportunidad en que avancen con sus conocimientos. Algunas pueden ser:

- la necesidad o no de dibujar todos los elementos del problema.

Por ejemplo, para el problema en el que hay que calcular cuántas patas tienen 5 gatos: "¿Hace falta dibujar los gatos?, ¿se puede resolver el problema dibujando solamente uno?". Los alumnos dicen que "*no hace falta dibujar todos",* o que "*se puede dibujar uno solo y contar muchas veces las mismas patas".* El maestro enfatiza esta conclusión para tenerla en cuenta cuando surgan problemas similares.

- la posibilidad de usar marcas que representen a los elementos.

Por ejemplo de una intervención del docente para el mismo problema: "*algunos chicos dicen que no hace falta dibujar todos los gatos, que se pueden dibujar directamente las patas*"*.* Se espera que los alumnos analicen la economía de realizar marcas que representen los elementos en comparación con un dibujo más realista, como por ejemplo *es más fácil hacer sólo las patas que dibujar todos los gatos, si hacés puntitos o rayitas para cada pata tardás menos..*

- la conveniencia de organizar espacialmente las marcas y de registrar datos parciales.

Por ejemplo: *¿Conviene hacer las patas todas juntas o separadas de a 4?, ¿les parece útil ir anotando cuánto va sumando o cuántos gatos ya se representaron?* Se apunta a que los niños aprendan que la organización espacial y el registro numérico de las cantidades parciales, favorece el control del propio procedimiento. Por ejemplo: *es más fácil contar después si están separadas, como si fueran las de cada gato, te conviene anotar arriba de las patas con números cuántos van.*
Producir un modo de representar las relaciones identificadas ya sea de manera gráfica o numérica, forma parte de la actividad matemática. Apoyarse en dicha representación puede ser el principio para comenzar a entender e imaginar una posible solución, y habilita a un proceso exploratorio de ensayo y error.

- La posibilidad de representar el problema sólo con números.

Por ejemplo: *Algunos chicos no dibujaron nada y pusieron números ¿Se puede resolver este problema con números?* o *Algunos chicos escribieron cuentas de más, ¿cuáles sirven para este problema?,* etc. Los chicos dicen que *no hace falta hacer las patas, podés poner cuatros, podés sumar muchos 4,* etc. Se apunta a que los niños reconozcan la suma reiterada como un recurso más económico que dibujar o hacer rayitas.

Este trabajo de reflexión apunta a la construcción del conocimiento, y si bien es posible que algunos hayan reflexionado sobre algunas de estas cuestiones, es necesario que sean explicitadas, lo cual no es tarea simple para los alumnos.

Que los conocimientos sean explicitados

- facilita el reconocimiento de su utilización favoreciendo la posterior reutilización.
- permite la apropiación por parte de los alumnos que están más demorados en la producción de estrategias de resolución.

Además, estas explicitaciones son insumos necesarios para ayudar al alumno en su estudio; por ello tiene que quedar todo claramente registrado en los cuadernos para que puedan reutilizarlo y darle un estatuto matemático.

Lo anterior no sería posible de ser abordado solamente por medio del trabajo con las "cuentas". Muchas veces resulta sorprendente ver la cantidad de conocimientos de los que disponen los chicos, y que no pueden utilizarlos si sólo se les brindan situaciones para hacer cálculos. Es decir que el planteo de problemas para los cuales no conocen una operación que los resuelva, permite que los alumnos hagan matemática y hagan surgir procedimientos propios, los cuales muestran relaciones que no se ven de otra forma.

La presentación del signo de multiplicar

En 2º año el docente puede presentar el símbolo de la multiplicación para abreviar una suma sucesiva.

> **Actividad 7** (para discutir en el encuentro presencial)
> Presentamos a continuación una secuencia didáctica diseñada para introducir el signo de la multiplicación. A partir de su lectura realice el registro del siguiente análisis:
> 1. ¿Cuáles son los conocimientos mínimos que es necesario que se encuentren disponibles en los alumnos para iniciar algún proceso de solución?
> 2. ¿Qué tipo de procedimientos se pueden anticipar?
> 3. ¿Cuáles son las nuevas relaciones que se busca que los alumnos puedan establecer? ¿Cuáles son las ventajas que aportan, frente a esta situación, los nuevos conocimientos en relación con los que ya tenían disponibles?
> 4. ¿Qué diferencias en el tratamiento del conocimiento aporta cada momento de la secuencia? ¿Qué variables didácticas[3] son posibles de ser reconocidas a lo largo de la misma?
> 5. ¿Cuáles son los diferentes momentos en que esta secuencia permite interacciones entre los pares? ¿Y de qué manera: en parejas, pequeños grupos, toda la clase? ¿Qué permitirían promover en relación con los conocimientos involucrados?
> 6**.** ¿Cuáles son las intervenciones docentes posibles de anticipar en el desarrollo de esta secuencia? ¿En qué momentos? ¿Durante la resolución? ¿Después? ¿Cuál sería el propósito de cada una de ellas?

[3] Las variables didácticas son aquellos aspectos del problema sobre los cuales el maestro, desde su intencionalidad, puede introducir modificaciones para lograr cambios en las producciones de los alumnos así como también, en los conocimientos puestos en juego. Dicho de otro modo, se denominan variables didácticas de un problema a aquellos elementos del mismo cuyo cambio modifica las relaciones matemáticas que el alumno realiza para abordar el problema.

El juego de las flores

Momento 1:

Objetivo: Lograr que los alumnos designen y comuniquen el número de objetos de una colección organizada en subcolecciones de igual tamaño por medio de diferentes procedimientos.

Materiales: Tarjetas con flores dibujadas según la siguiente distribución:

Nº de flores	Nº de pétalos por flor	Total de pétalos
4	5	20
8	4	32
4	3	12
10	2	20
5	6	30
10	3	30

Organización de la clase: Trabajo en grupos de 2 o 3 alumnos. La cantidad de grupos debe ser par, ya que se trata de una situación de comunicación en la que cada grupo deberá interactuar con otro.

Descripción de la situación: Cada equipo recibe una de las tarjetas con el dibujo de flores. En ella debe producir un mensaje que no contenga dibujos, para que al enviárselo al grupo con el que interactúa, éste pueda averiguar cuál era la tarjeta que les tocó.
Una vez que hayan determinado por medio del mensaje la cantidad de flores, pétalos por flor y cantidad total de pétalos, deberán verificar la igualdad comparando con la tarjeta que poseen los emisores del mensaje.
En caso de haber diferencias, los emisores y los receptores deberán discutir si estas son producto de errores en el mensaje o en la interpretación del mismo.
A continuación, el maestro propone analizar los diferentes mensajes que hayan surgido en los grupos, centrando la discusión sobre la pertinencia o no de los mismos, claridad, economía, utilización o no de números, signos, etc.
De ser posible en esa misma clase, jugarán nuevamente eligiendo una tarjeta diferente (si fuera necesario retomar la situación en una clase posterior, será importante que el maestro recupere lo trabajado previamente en la puesta en común). En esta segunda puesta en juego de la situación, el maestro podrá introducir en la consigna la propuesta de buscar la manera más corta de escribir el mensaje, con el objetivo de provocar el abandono de mensajes verbales extensos y la aparición mayoritaria de escrituras numéricas del tipo 5+5+5+5=20.

Momento 2:

Objetivo: Introducción de la escritura a x b.

Parte 1:
Descripción de la situación: El docente dibuja en el pizarrón algunas de las tarjetas con flores. Por ejemplo, la que tiene 4 flores con 5 pétalos cada una y escribe 5+5+5+5=20. Hace tomar conciencia de que el hecho de haber sumado 4 veces el 5 responde a que hay 4 flores con 5 pétalos cada una. A continuación escribe 4 x 5=20 explicando que ese signo es el de la multiplicación, resaltando que el 4 significa cantidad de flores, el 5 cantidad de pétalos por flor y el 20, la cantidad total de pétalos en 4 flores. Luego pide a los alumnos que utilicen la escritura a x b para expresar las cantidades correspondientes a las otras tarjetas.

Parte 2:
El maestro escribe algunas expresiones multiplicativas y pide a los alumnos que expresen cómo serían las tarjetas, es decir, qué cantidad de flores, pétalos por flor y cantidad de pétalos totales tendrían.

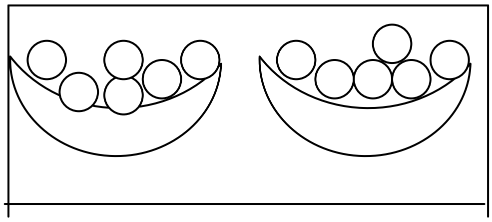
Luego pide a los alumnos que decidan si esas escrituras se podrían utilizar para resolver cuántas ruedas hay en 5 bicicletas; cuántas patas hay en 4 perros; cuánto dinero en 3 billetes de $10; etc.
A posteriori, se les pedirá a los alumnos que en pequeños grupos busquen otras situaciones en las que las escrituras multiplicativas sean una herramienta. Se organiza una puesta en común para analizar las diferentes propuestas y la pertinencia de las expresiones.

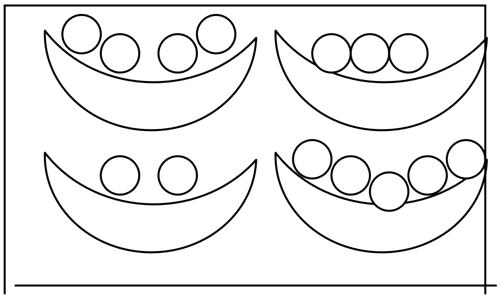
Momento 3:

Objetivos*:*

- Lograr que los alumnos designen el número de objetos de una colección organizada en subcolecciones de igual tamaño, por medio de una escritura multiplicativa del tipo a x b.
- Que los alumnos sepan diferenciarlas de a + b.

Materiales: Tarjetas con dibujos de canastas con frutas, algunas con igual cantidad de frutas en cada canasta y otras con cantidades diferentes en cada canasta. Por ejemplo:





Organización de la clase: Trabajo en pequeños grupos.

Descripción de la situación: Se le entrega a cada grupo dos tarjetas, una con cantidades iguales y la otra no. Los alumnos deberán escribir una operación para cada tarjeta que permita identificarlas. A continuación, se analizarán las escrituras realizadas por todos los grupos, clasificando las tarjetas en las que utilizaron escrituras multiplicativas de las que utilizaron escrituras aditivas.

Las tarjetas con subcolecciones de igual tamaño que pueden haber sido ubicadas en las dos clases, por ejemplo 4x5 ó 5+5+5+5, permitirán introducir el siguiente problema. ¿Para todas las tarjetas se puede escribir una multiplicación? ¿Cuáles son las tarjetas en las que no es posible escribir una multiplicación?

¿Es necesario aprender las tablas?

> **Actividad 8** (de autocorrección)
> Al leer este apartado, establezca relaciones con lo desarrollado anteriormente acerca de la necesidad de organizar la enseñanza mediante secuencias de actividades vinculadas entre si. Recuerde que la elaboración de estas actividades apunta a articular las propuestas, de modo que cada momento del trabajo constituya un punto de apoyo para el siguiente, y éste a su vez retome y avance en algún sentido sobre el anterior.

Es una realidad frecuente y no solo en 1º ciclo, que los alumnos tienen dificultades a la hora de tener que utilizar las tablas de productos[4]. Cada año, los maestros suelen encontrarse con alumnos a los que pareciera que, "*nunca les hubieran enseñado las tablas".*
Este fenómeno suele interpretarse como un problema de aprendizaje. Desde nuestra perspectiva, quisiéramos incluir en el análisis, los problemas de la enseñanza que subyacen a las carencias generalizadas de estos conocimientos.

En general, durante años, las tablas se han venido enseñando según los siguientes criterios:

- una marcada tendencia a la repetición ordenada de los productos desde 1 a 9. Por ejemplo, para la memorización de la tabla del 2 se pide su estudio repitiendo: 2x1=2; 2x2=4; 2x3=6;.... 2x9=18.

- la presentación de las diferentes tablas de productos siguiendo el orden de la serie numérica: primero la tabla del 2, luego la del 3, luego la del 4, ...por último la del 9 bajo el supuesto que si los números son más pequeños, entonces la tabla de productos también lo es. A modo de adelanto, le pedimos que analice la complejidad de la tabla del 3 en relación con la del 5.

- una marcada desvinculación con las propiedades de la multiplicación, el establecimiento de relaciones y la organización de resultados.

Estas decisiones acerca de su enseñanza provoca, en primer lugar, que los alumnos, para encontrar el resultado de 2x8 por ejemplo, tengan que recitar toda la tabla de productos, 2x1=2, 2x2=4, 2x3=6, ... hasta llegar al 2x8=16. Este camino para la búsqueda del producto, suele provocar "olvidos" en las reglas del algoritmo que están utilizando.

En segundo lugar, el orden en el que se enseñan impide que los alumnos puedan establecer relaciones entre las diferentes tablas; relaciones que están vinculadas con las propiedades de la multiplicación, y que son necesarias para la construcción de conocimientos que tengan sentido.

Con el objeto de contribuir al aprendizaje y a un uso reflexivo de las tablas de multiplicar, nuestra propuesta de enseñanza es distinta en tanto propone encuadrar el trabajo alrededor de situaciones que permitan analizar las relaciones entre los números y las propiedades consecuentes. De ese modo, los niños aprenderán dichos resultados pero también tendrán elementos para construirlos a partir de otras multiplicaciones y/o de la aplicación de las propiedades (aunque estas no sean enunciadas como tales en primer ciclo):

- estableciendo relaciones de dobles, triples y mitades de números de 1 y 2 cifras.
  Disponer del conocimiento de estas relaciones permite que los alumnos construyan relaciones multiplicativas destinadas a la adquisición no sólo de los productos por dos, sino también de recursos de cálculos más complejos que pueden apoyarse en dichos conocimientos. Por ejemplo, 7x4 puede ser un cálculo que genere dificultad en muchos alumnos, sin embargo puede transformarse en fácil si se lo piensa como 7x2=14 y 14x2=28.

- estableciendo equivalencias entre diferentes multiplicaciones.
  Por ejemplo, multiplicar por 4 es equivalente a multiplicar por 2 y por 2; multiplicar por 6 es equivalente a multiplicar por 2 y por 3; multiplicar por 8 es equivalente a multiplicar por 2 y por 4; multiplicar por 9 es equivalente a multiplicar por 3 y por 3; etc.

- usando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o de la resta en la descomposición de uno de los factores.

---

[4] Moreno, Beatriz y Quaranta, María Emilia, *Alfabetización en Matemática* (2005) Red de Apoyo Escolar y Educación Complementaria. RAE.

Por ejemplo, 8x7 es igual a 8x5=40 más 8x2= 16; 40+16=56. En este caso se recurre a la descomposición aditiva del 7 como 5+2.

- usando la propiedad asociativa en la descomposición multiplicativa de uno de los factores.
  Por ejemplo, 7x8 es igual a 7x4=28 y 28x2= 56. En este caso se recurre a la descomposición multiplicativa del 8 como 4x2.

- usando la propiedad conmutativa en aquellos casos que faciliten el cálculo.
  Por ejemplo, para los alumnos que aún no disponen de cálculos memorizados y necesitan realizar sumas sucesivas, es más económico pensar 2x8= como 8x2=.

Dijimos que el reconocimiento de estas relaciones facilita la apropiación del repertorio multiplicativo. Esto será posible en la medida en que los alumnos descubran las relaciones que subyacen a las tablas de productos.

Los productos de la tabla del 4 pueden aparecer como el doble de los productos de la tabla del 2; los de la tabla del 8 como el doble de la del 4 o como el producto de un número x2, otra vez x2 y nuevamente x2. Con el mismo criterio, los productos de la tabla del 6 pueden encontrarse al apoyarse en los resultados conocidos de la tabla del 3 y duplicándolos, y la del 9 apoyándose en los productos conocidos de la tabla del 3 y triplicándolos. Los resultados de la tabla del 7 pueden obtenerse multiplicando por 3, luego por 4 y finalmente sumando los productos, o también multiplicando por 2, luego por 5 y sumando los productos, o multiplicando por 6, luego por 1 y sumando los productos, o multiplicando por 8, luego por 1 y restando los productos etc.

Es necesario que el docente promueva en los alumnos el establecimiento de distintas relaciones que permitan resolver un cálculo. De esta manera, los alumnos podrán seleccionar uno de los procedimientos según los números puestos en juego en la situación que deban resolver.

Para que los alumnos puedan hacer uso de estas estrategias, es necesario haber encarado previamente tanto el trabajo de dobles, triples, mitades, como también el inherente a la ampliación del repertorio aditivo de las formas: sumas sucesivas y suma de productos.

En primer lugar, esto se justifica porque en los primeros aprendizajes de la multiplicación (como de cualquier otro conocimiento matemático), los alumnos se apoyan en lo que saben; y este conocimiento previo es la suma: 5x3 es pensado y resuelto como 5+5+5=15. Este es el primer significado de la multiplicación como suma reiterada. Sin embargo no es el único. A lo largo de la escolaridad, se deberán trabajar los otros sentidos del campo multiplicativo para evitar que los alumnos supongan que la multiplicación es un caso particular de la suma. Este es un error conceptual debido a que el producto *no es* una suma abreviada, sino que en algunas situaciones *puede serlo*. Esta idea equivocada se desprende de una enseñanza que solo se refiere a ese aspecto de la multiplicación, y que se hace visible en la frase *multiplicar es lo mismo que sumar pero más rápido* que tantas veces se repite a los niños.

En segundo lugar, si un alumno necesita apoyarse en el conteo uno en uno utilizando los dedos para resolver, por ejemplo 4x8, es altamente probable que el resultado al que arribe sea incorrecto, sea porque pierda el control de cuántas veces ya adicionó el 8, o porque se confunda entre tal cantidad de dedos. Esperamos que pueda disponer del conocimiento del cálculo aditivo como para hacer: 8+8+8+8=16+16=32.

Más allá de la contradicción de pedir a un alumno la construcción del repertorio multiplicativo cuando aún no dispone del cálculo mental aditivo, hay que reconocer a este último como un saber de base necesario para poder establecer las relaciones en las que estamos interesados.

Así, se deberá encarar un trabajo minucioso de sumas repetidas desde el 2+2+2....al 10+10+10.... No se trata de hacer repetir y repetir esos cálculos, sino de ofrecer situaciones en las que los niños puedan descubrir las regularidades subyacentes.

Un buen recurso para esto es trabajar con los cuadros de números hasta 100, pidiendo a los alumnos por ejemplo, que marquen con diferentes colores sobre una misma tabla, los números en los que van cayendo a medida que suman de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc. partiendo del 0. Apuntamos a que los alumnos puedan descubrir las distintas regularidades que se dan en cada caso. Por ejemplo, los números pintados producto de contar de 2 en 2, mostrarán que se repite la misma regularidad en todas las filas.

Remarcamos que es necesario que el maestro, desde su intencionalidad, dirija el análisis hacia el establecimiento de las regularidades. Intentamos demostrar a los alumnos que disponer de la posibilidad de contar de 2 en 2, por ejemplo, no requiere de *aprenderse de memoria* todos los resultados; solo hace falta saber los primeros 5 resultados y los nombres de los nudos de las decenas, centenas etc., y coordinarlos para poder decir: "dos, cuatro, seis, ocho, diez, **doce**, **catorce**, dieci**séis**, dieci**ocho**, veinte, veinti**dós**, veinti**cuatro**, veinti**séis**, veinti**ocho**, treinta, treinta y **dos**, treinta y **cuatro**, y así...

En cambio, al contar de 7 en 7, solo se recupera la regularidad a partir del 70, recién allí decimos setenta y siete, ochenta y cuatro, noventa y uno, (posibles de ser relacionados con 7, 14, 21)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100									

Los números pintados a raíz de haber ido sumando de 3 en 3 mostrarán que es necesario llegar al 30 para que se repita nuevamente la misma regularidad, etc.
Es importante que se propongan momentos de análisis de forma individual o en pequeños grupos para que puedan descubrir y comunicar distintas regularidades. Algunas consignas posibles para organizar este momento de la clase serían:

- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los números que pintaste sumando de 2 en 2 y de 4 en 4? ¿Y con los que pintaste sumando de 8 en 8?
- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los números que pintaste sumando de 3 en 3 y de 6 en 6? ¿Y con los que pintaste sumando de 9 en 9?
- ¿Qué sucede con los números en los que caíste sumando de 9 en 9? (En todos los casos aumenta 1 en las decenas y disminuye 1 en las unidades)
- ¿Cómo terminan todos los números que pintaste sumando de 5 en 5 partiendo del 0?
- ¿Qué números tendrías que pintar si partís del 5 y sumás de 10 en 10? ¿Y si partieras del 15? ¿Y si partieras del 35? ¿Por qué sucede eso? ¿Sucederá lo mismo si partís de cualquier otro número de la tabla?
- Alguien pintó los números: 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36. ¿De a cuánto iba sumando?
- Alguien cayó en varios números entre los que estaban el 24 y el 36. ¿De a cuánto iba sumando? ¿Existe una sola posibilidad?
- Etc., etc.

Otras situaciones posibles que apuntan a las mismas relaciones son:

a) Contando de a 4 a partir de 0, ¿cuáles de los siguientes números se dicen? Decidilo sin contar:

8 14 20 24 80 34 36 46 100 400 68

b) Contando de 5 en 5 a partir de 0, ¿cuáles de los siguientes números se dicen? Explicale a tus compañeros cómo lo pensaste

10 45 54 100 65 52 70 1.000 325

c) Contando de 2 en 2 a partir de 0, ¿cuáles de los siguientes números se dicen?

35 50 10 60 7 20 25 30 22 12 100

d) Contando de 8 en 8 a partir de 0, ¿es posible llegar al número 89? 95? 20? 17?

e) Sumando de a 10 a partir de 0, ¿en cuáles de los siguientes números se cae?

40 75 100 127 240 174 200 400

f) Contando de 20 en 20 a partir de 0, ¿cuáles de los siguientes números se dicen?:

70 60 42 200 240 250 500 222

g) Completá las siguientes afirmaciones dando al menos tres posibilidades para cada caso. Cuando no es posible, indicalo.

- Sumando de a...., ¿es posible alcanzar el número 60?
- Sumando de a...., ¿es posible alcanzar el número 100?
- Sumando de a...., ¿es posible alcanzar el número 48?
- Sumando de a...., ¿es posible alcanzar el número 24?
- Sumando de a..., ¿no es posible alcanzar el número 32?
- Sumando de a..., ¿no es posible alcanzar el número 40?
- Sumando de a..., ¿es posible alcanzar el número 23?

Se puede proponer una tarea similar en actividades usando la calculadora, pidiendo a los alumnos que anticipen los resultados que irán apareciendo en una suma sucesiva de a…

Con respecto a la adición de productos, se trata de un conocimiento necesario para poder aplicar luego las propiedades y relaciones descriptas más arriba. No se puede esperar que un alumno resuelva 7x4 como 7x2=14; 14x2=28, si no dispone del cálculo memorizado de 14+14=28 y necesita contar con los dedos. En este tipo de cálculos, se apunta a que los alumnos realicen descomposiciones del tipo: 10+10+8=28. Habrá que organizar entonces un trabajo intensivo de búsqueda y reflexión acerca de los modos de resolver este tipo de cálculos. Este trabajo está fuertemente relacionado con el cálculo de dobles y mitades propuesto.

De esta manera, será posible un verdadero dominio del repertorio, en tanto que la puesta en juego de lo que se sabe para descubrir lo que no se sabe, reemplaza a la memoria por si misma y con ello, los olvidos recurrentes.

Por supuesto que memorizar las tablas es un recurso útil en el momento de hacer cálculos. Sin embargo, como ya se dijo, antes de trabajar la memorización es un buen insumo desarrollar actividades dirigidas al análisis de un conjunto de productos. Por ejemplo, en segundo año la construcción de tablas de proporcionalidad permite empezar a poner en juego algunas primeras relaciones numéricas[5].

Esta clase de problemas cumple con una serie de propiedades que se espera los niños utilicen frente a los problemas: por ejemplo, al doble de bicicletas corresponderá el doble de ruedas; o sabiendo cuántas ruedas corresponde a 5 y a 2 bicicletas, es posible saber cuánto corresponderá a 7 bicicletas, etc.

[5] En el apartado “Problemas multiplicativos y sentidos del producto, encontrarán un desarrollo acerca de este tipo de problemas.

Bicicletas	Ruedas		Triciclos	Ruedas		Autos	Ruedas
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	2 4 6 8 etc.		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	3 6 9 12 etc.		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	4 8 12 16 etc.

Una vez analizadas, estas tablas pueden constituirse en un lugar de consulta con *información útil* para resolver otros problemas. Se apunta a que los niños empiecen a reconocer que para saber *cuántas patas tienen 5 perros*, es posible fijarse en cuántas ruedas tienen 5 autos. Las relaciones numéricas allí elaboradas empiezan a ser útiles para otros problemas similares.

Con el mismo criterio[6], se podrán utilizar otras tablas que permitan analizar otros productos como por ejemplo:

Paquetes	Figuritas
2	10
4	....
8	....
1	....
3	....
6	....
9	....
5	....
7	....
15	....
18	....

La línea de análisis para ésta y para cualquier otra tabla que el maestro decida utilizar, debe estar centrada nuevamente en las propiedades que caracterizan la relación de proporcionalidad directa:

- Si se suman dos cantidades de una de las dos variables, se obtiene una cantidad que se corresponde también con la suma de las dos cantidades correspondientes de la otra variable. Por ejemplo: 6+9=15. Entonces el resultado de 15 paquetes es 30+45=75.

- Si se multiplican dos cantidades correspondientes por un mismo número, se mantiene la proporción (al doble el doble, al triple el triple, a la mitad la mitad, etc.) Por ejemplo: para encontrar el resultado de 18 paquetes, se puede pensar que 9x2=18, entonces el resultado es el doble de 45, o sea 90.

[6] Moreno, Beatriz y Quaranta, María Emilia, *Alfabetización en Matemática* (2005) Red de Apoyo Escolar y Educación Complementaria. RAE.

Actividad 9 (para discutir en encuentro presencial)
Analice cómo se presentan las tablas de multiplicar en los libros de texto de 1° ciclo que disponga.
Para cada propuesta, identifique el trabajo matemático al que se apunta, y vincúlelo con lo que hemos trabajado hasta ahora.

Tabla pitagórica

Para el abordaje de todos los productos de los números del 1 al 10 se puede trabajar a partir de un análisis de la tabla pitagórica (cuadro de doble entrada para los productos hasta 10 x 10). Esta tabla puede completarse a partir de diferentes estrategias. Algunos alumnos descubren que se repiten casi todos los casilleros (3x4 = 4x3), excepto los que son de multiplicación por sí mismos, y dicen que la mitad de la tabla es igual a la otra mitad (tomando la diagonal como eje de simetría). Otros alumnos encuentran que se puede ir completando verticalmente sumando sucesivas veces el número de la columna. Muchos niños hacen en primer lugar las filas de números "más redondos" como el 2, el 4, el 5, etc. y luego completan la columna correspondiente al mismo número. Cada estrategia, lleva implícita una o más propiedades de la multiplicación y de los números involucrados.

Las diferentes relaciones que los alumnos encuentren o que el maestro haga notar tienen que ser retomadas luego por el docente para darles un estatuto matemático. Sin esta instancia, los alumnos no podrán establecer el alcance de validez de las relaciones ni tampoco identificar si lo que hallaron es general o no. Por ejemplo, el hecho de que los alumnos descubran que los resultados de la tabla del 4 son el doble de los resultados de la tabla del 2, no significa que al mismo tiempo puedan establecer que la tabla del 8 es el doble de la tabla del 4.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											

Una manera de organizar este trabajo[7] podría ser volcar los productos que aprendieron por medio del trabajo con las tablas proporcionales en la tabla pitagórica. Además de hacerlo en tablas individuales, se pueden volcar sobre una tabla colocada en el frente del aula los productos que los alumnos manifiestan recordar. Se podrán organizar así discusiones acerca de dichos resultados para que todos tengan la posibilidad de analizarlos.

Otra manera es que el maestro pida que completen en sus tablas la columna del 2 y organice el siguiente análisis.

- ¿En qué se parecen esos resultados con los de cálculo aditivo de dobles desde el 2+2 al 10+10? ¿Por qué sucede esto?
- ¿De a cuánto aumentan los números de la columna partiendo del 0? ¿Y los de la fila?
- ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los resultados que están entre el 0 y el 10 con los que están entre el 10 y el 20? ¿Y si hubiera que encontrar resultados entre el 70 y el 80? ¿Y entre el 240 y el 250?

Luego, podrá proponerles que completen en sus tablas la columna del 5. Si ocurre que ya lo hicieron, los introducirá directamente en su análisis, apuntando a que se establezca que “la tabla del 5 es fácil” porque:

- todos los números de la fila y de la columna del cinco terminan alternativamente en 0 o en 5.
- si recorremos la tabla saltando dos veces de cinco en cinco a partir del 10 (5 x 2), encontramos la tabla del 10.
- si recorremos la tabla saltando dos veces de cinco en cinco a partir de un número que termina en 5, se “cae” en otro número que también termina en 5, que es el resultado de haberle sumado 10 al anterior.
- los resultados de la tabla del 5 son la mitad de los correspondientes en la tabla del 10.

Luego el docente propondrá el mismo trabajo sobre la columna y la fila del 10. Si ya las hubieran completado, se procederá directamente a su análisis:

- ¿cómo son los números de esta columna? ¿Qué sucede?
- ¿qué relación hay entre el 4 del 40 y 4 veces 10 ó 4 x 10? Esa relación, ¿es la misma con cualquier otro resultado?
- ¿qué sucede si extienden la columna del 10 hasta 10x19? ¿Por qué sucede esto?
- ¿se puede utilizar lo que descubrieron para calcular 32x10? ¿Y para calcular74x10?
- ¿habrá algún número de dos cifras donde no suceda? Usen la calculadora para demostrarlo.

Este mismo tipo de trabajo se podrá plantear en relación con otras tablas de productos. Una manera de vincularlo con el trabajo realizado con los cuadros de números y las sumas repetidas, es pedir que busquen en lo que hicieron; qué informaciones les son útiles para completar la tabla de productos.

Otras relaciones que suelen encontrar son las siguientes.

- Los números en la columna del 4 son el doble de los de la columna del 2.
- Lo anterior también pasa para las columnas del 5 y 10, 3 y 6, etc.
- Si se suman algunos valores se obtienen otros. Por ejemplo, como $3 \times 5 = 15$ y $3 \times 2 = 6$, entonces $3 \times 7 = 15 + 6 = 21$.
- El resultado de una multiplicación no cambia si se cambian de orden los números. Por ejemplo, 3×5 es igual a 5×3.
- El docente puede preguntar si es cierto que multiplicando los resultados de la columna del 2 con la del 3 se obtiene la del 5. Este tipo de intervenciones está dirigida a hacer explícitos ciertos errores conceptuales que los alumnos pudieran tener. Es importante que se pongan en discusión y se den razones matemáticas para rechazarlos.

[7] Moreno y Quaranta. Ob. cit.

Veamos cómo en la Escuela Nº 1 de 25 de Mayo les proponen a los niños de tercer año el análisis de un sector de la tabla. (DGCyE 2001)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55

¿Qué encuentro entre las columnas del 2 y del 4, y en la del 5 y en la del 10?

Que entre las columna del 2 y la del 4 son separando de a mitad y también para eso en la del 5 y la del 10

¿Qué números se repiten y cuáles no?

Se repiten el: 20, 9, 15, 4, 6, 12, 10, 5, 2, 1, 3, 15, 30, 40, 8, 18, 24

Los otros no se repiten

18

Y en otro tercer grado registran otras propiedades encontradas:

Conversando entre todos

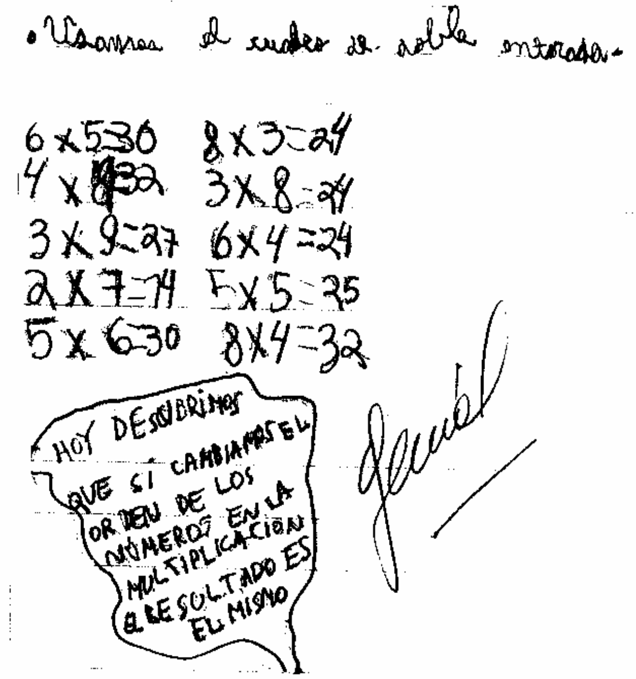
vimos que se pueden sumar

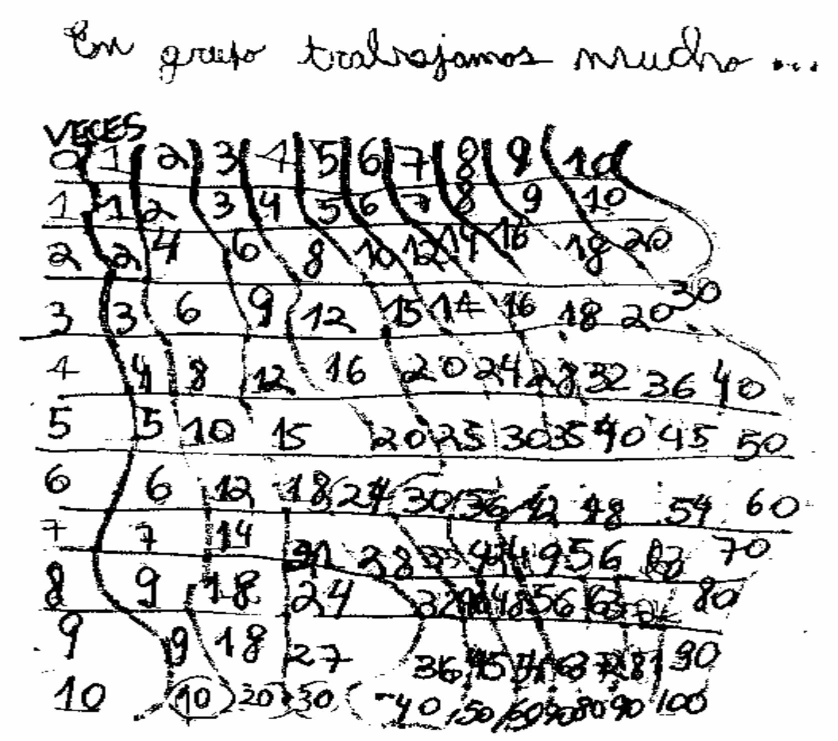
columnas $3 \times 2 = 6$

$3 \times 3 = 9$

y $3 \times 5 = 9 + 6 = 15$

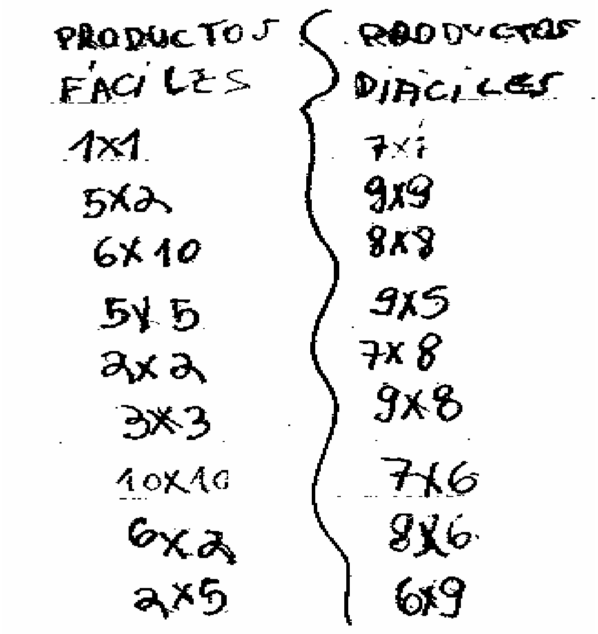
En la Escuela Nº 1 de Marcos Paz, Mónica Capurro también les propone a sus alumnos completar y analizar la tabla.


Usamos el cuadro de doble entrada.
6x5 30 8x3=24
4x8 32 3x8=24
3x9=27 6x4=24
2x7=14 5x5=25
5x6 30 8x4=32
HOY DESCUBRIMOS QUE SI CAMBIAMOS EL ORDEN DE LOS NÚMEROS EN LA MULTIPLICACIÓN EL RESULTADO ES EL MISMO

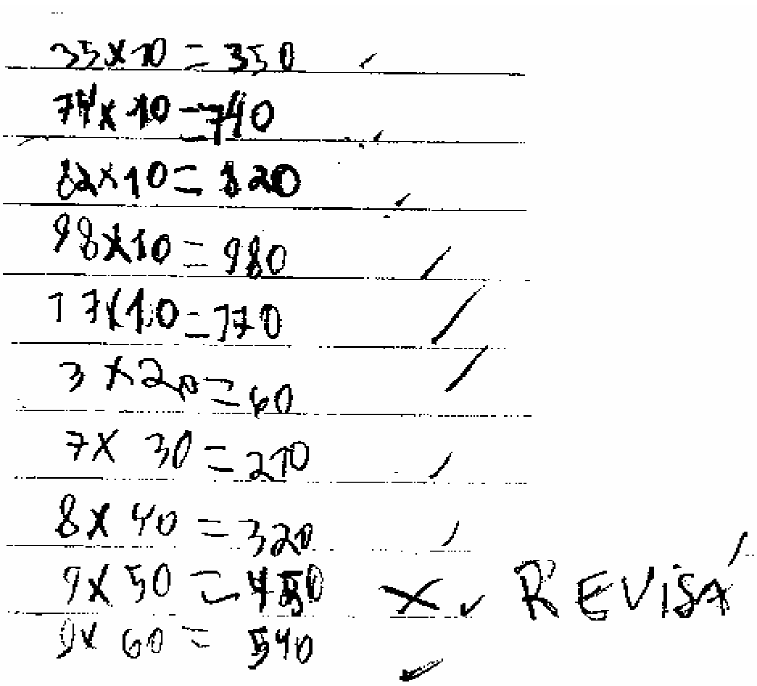

En grupo trabajamos mucho...
VECES
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
3 3 6 9 12 15 14 16 18 20 30
4 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40
5 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
6 6 12 18 24 30 36 42 48 54 60
7 7 14 21 28 35 42 49 56 63 70
8 9 18 24 32 40 48 56 64 80
9 9 18 27 36 45 81 90
10 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Los productos de este cuadro son objeto de análisis y de estudio durante algunas clases. Como algunas propiedades no son encontradas por los niños, las docentes las propusieron para que sus alumnos analizaran si eran válidas o no. Por ejemplo: *Unos chicos de otra escuela dijeron que si uno suma los números de la columna del 2 con la columna del 3, obtiene los resultados de la columna del 5. ¿Es verdad? ¿Pasará con otros números?* o bien *Fíjense si hay alguna columna que sea el doble, el triple o el cuádruple de otra,* etc.

Durante clases siguientes este cuadro de doble entrada se constituye en "material de consulta". Los alumnos pueden utilizarlo para consultar resultados de problemas que se les presentan. Posteriormente, se propone la reconstrucción de los productos utilizando las propiedades y relaciones encontradas (*"no se cuánto es 8 x 7 pero sé que es el doble que 7 x 4 o puedo hacer 8 x 5 y 8 x 2 y sumarlos")*.
Recién después de este trabajo de análisis y reconstrucción, hemos propuesto su memorización con actividades y juegos diversos. Por ejemplo, se pueden establecer cuáles son los productos que ya todos saben ("fáciles") y aquellos que hay que aprender ("difíciles"), como plantea la maestra de la escuela 1 Bartolomé Mitre a sus alumnos de tercer año:



Entre los recursos memorizados de los que los niños deben disponer se encuentra la multiplicación por la unidad seguida de ceros. Para ello, se podrá abordar a partir de algunos problemas cálculos de diferentes números x10, x 20, x 30, x 100, x 200, etc. Veamos también cálculos de ese mismo grado:



35x10=350
74x10=740
12x10=120
98x10=980
17x10=170
3x20=60
7x30=210
8x40=320
9x50=450 x REVISA
9x60=540

> **Actividad 10** (para discutir en el encuentro presencial)
> ¿Cómo se puede validar que, al multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, se mantiene el mismo número y se le agregan los ceros?

¿Cómo llegar al algoritmo en el primer ciclo?

Como venimos afirmando, creemos que los conocimientos sobre las operaciones se elaboran a partir de establecer relaciones a propósito de la resolución de problemas, y no a partir de la adquisición aislada y externa de técnicas de cálculo. Sin embargo, no solo la resolución de problemas permite construir conocimientos sobre las operaciones, sino que también es necesario un análisis específico sobre los procedimientos para permitirles avanzar.

La resolución de problemas, la construcción de estrategias frente a los mismos y la disponibilidad progresiva de un repertorio de resultados, son aspectos que se alimentan unos a otros en el aprendizaje de las operaciones.

En consecuencia, en el caso de la multiplicación buscamos abrir el juego a que los alumnos utilicen -en diferentes tipos de tareas-, sus procedimientos mas personales, no convencionales, para ser confrontados con los que hicieron otros, para que reflexionen sobre ellos, se apropien de otros nuevos, y de esta manera puedan avanzar en sus adquisiciones.

En segundo año, se espera poder reconocer la escritura multiplicativa a x b = c, pero no presentar aun el algoritmo convencional de la multiplicación, que será más comprensible avanzado tercer año, teniendo ya disponibles diferentes relaciones multiplicativas y sobre el sistema de numeración. Estos conocimientos harán posible evitar la banalización de un procedimiento que la humanidad tardó siglos en construir,
al hacer aparecer la cuenta para resolver cálculos en los que lo más pertinente es utilizar el cálculo mental, como por ejemplo en el caso de presentar:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 2 \\ \hline 14 \end{array}$$

Sugerimos que los diferentes procedimientos que mencionamos anteriormente, se analicen primordialmente en las instancias de reflexión colectiva organizadas en torno a los diferentes problemas que hasta ahora hemos propuesto o que elija el docente. Pero también se incluirán problemas en los cuales el cálculo sea objeto de análisis. Por ejemplo, antes de enseñar la cuenta, se podrán proponer a los alumnos diferentes estrategias de cálculo para hallar el resultado de una multiplicación para ser analizadas.

Un ejemplo posible para tercer año:

a) para resolver 7 x 54, Jacinta hizo lo siguiente

7 x 50 = 350
7 x 4 = 28
7 x 54 = 350 +28 = 378

Se pedirá a los alumnos que traten de comprender y explicar este procedimiento, si lo consideran válido o no, por qué, cómo se puede saber si efectivamente se hicieron 7 veces 54; en qué se parece a resolver 8 x 7 cuando no se acuerda el resultado, haciendo 7 x 6 y 7 x 2 y sumando los resultados parciales, etc.
Se pueden explorar además otras descomposiciones aditivas del 54 (o del 7). Por ejemplo: 7 x 10 + 7 x 10 + 7 x 10 + 7 x 10 + 7 x 10 + 7 x 4; etc.

Luego del análisis, se les solicitará que utilicen un procedimiento similar para encontrar el resultado de otras multiplicaciones (por ejemplo: 4 x 62; 5x 74, etc.)

Resulta muy interesante enfrentar a los alumnos a situaciones en las que tengan que indagar si es posible extender los conocimientos construidos en casos en los que se involucran números mayores. Muchas veces los alumnos suponen que esos procedimientos son válidos para números de dos cifras, pero dudan cuando se los interroga acerca de la pertinencia en números mayores. Se trata de favorecer los procesos de generalización del conocimiento en términos –en este caso-, del alcance de la validez que tiene la descomposición de números para resolver cálculos multiplicativos.

b) Por ejemplo: Para resolver 3 x 218, Julián hizo lo siguiente:

3 x 200 = 600
3 x 10= 30
3 x 8 = 24. Entonces 3 x 218 = 600 + 30+ 24 = 654

Traten de explicar cómo lo pensó, si sirve para resolver esa multiplicación, cómo podemos estar seguros de que hizo 3 veces 218. ¿En qué se parece al caso a)?, ¿qué cosa nueva es la que hay que hacer para multiplicar números de tres cifras?, ¿y si tuvieran que multiplicar un número de cuatro cifras?, etc.

Una vez que los alumnos hayan tenido la oportunidad de resolver y analizar muchos cálculos similares a los anteriores, se les podrán presentar diferentes cuentas de multiplicar como nuevos procedimientos posibles de ser utilizados. Será muy importante pedirles que analicen en qué se parecen y en qué se diferencian con los procedimientos que hasta ahora han utilizado revisando las páginas del cuaderno en donde se encuentren. También es fundamental que reflexionen en qué se parecen y en qué se diferencian entre sí, los tres ejemplos de algoritmo que incluimos como ejemplo en el tipo 3), qué quiere decir ese 2 encima del 1, donde está ese 2 en las otras cuentas, que tiene que ver ese 2 con lo que hacen en la cuenta de suma cuando se lo “llevan” al de al lado que vale lo mismo, ¿cuánto vale el 2? ¿Y el 1?, etc.

Como ejemplo para el caso de *3 x 218*:

1)
```
   218
    X3
  ----
    24
+   30
   600
  ----
   654
```

2)
```
   218
    X3
  ----
   600
    30
    24
  ----
   654
```

3)
```
     2
   218
    x3
  ----
 6 5 4
```

Actividad 11 (para discutir en el encuentro presencial)

1. Lea la propuesta que realiza el Diseño Curricular sobre la enseñanza de los algoritmos en el 1º ciclo de la EP, y relaciónelo con lo desarrollado en el apartado anterior.
2. Registre todas aquellas cuestiones que considere importantes para ser planteadas en el encuentro presencial.

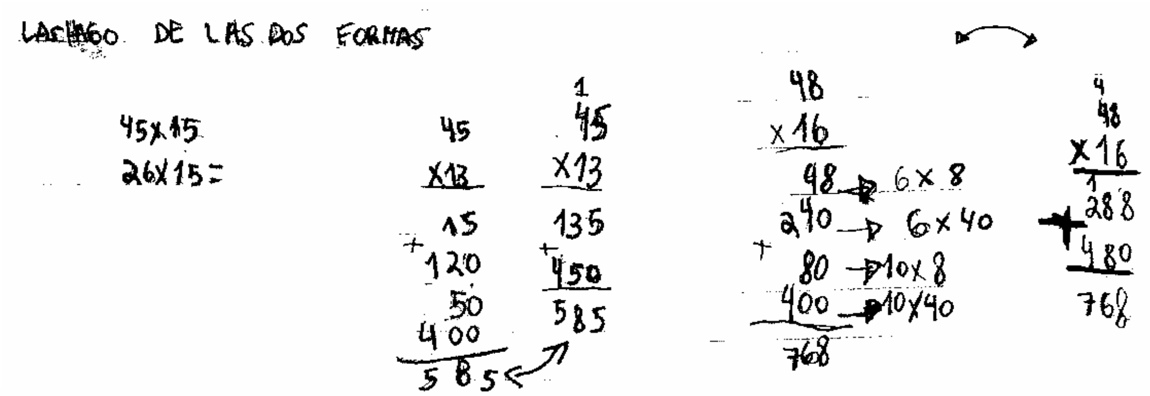
¿Cómo llegar al algoritmo por dos cifras?

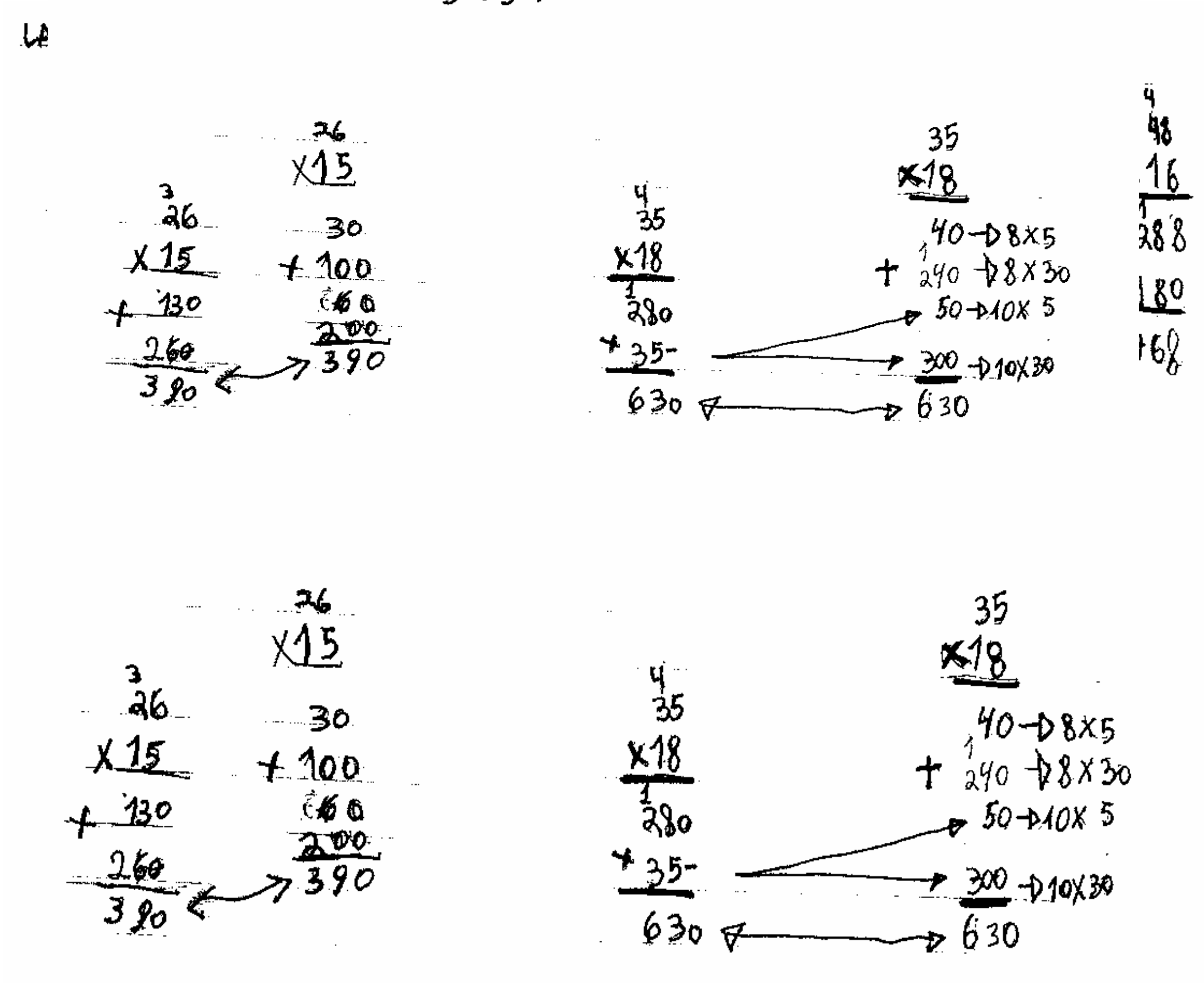
Una vez hecho el recorrido anteriormente descrito y habiendo resuelto muchos cálculos se les puede presentar dos maneras de resolver los productos por dos cifras:

$25 \times 12 = 25 \times 10 + 25 \times 2 = 250 + 50 = 300$

Esta última igualdad no es difícil de explicar: 25 × 12 es sumar 12 veces el número 25, lo cual se puede pensar como que se lo suma 10 veces y luego se lo suma 2 veces más, es decir $25 \times 10 + 25 \times 2$.

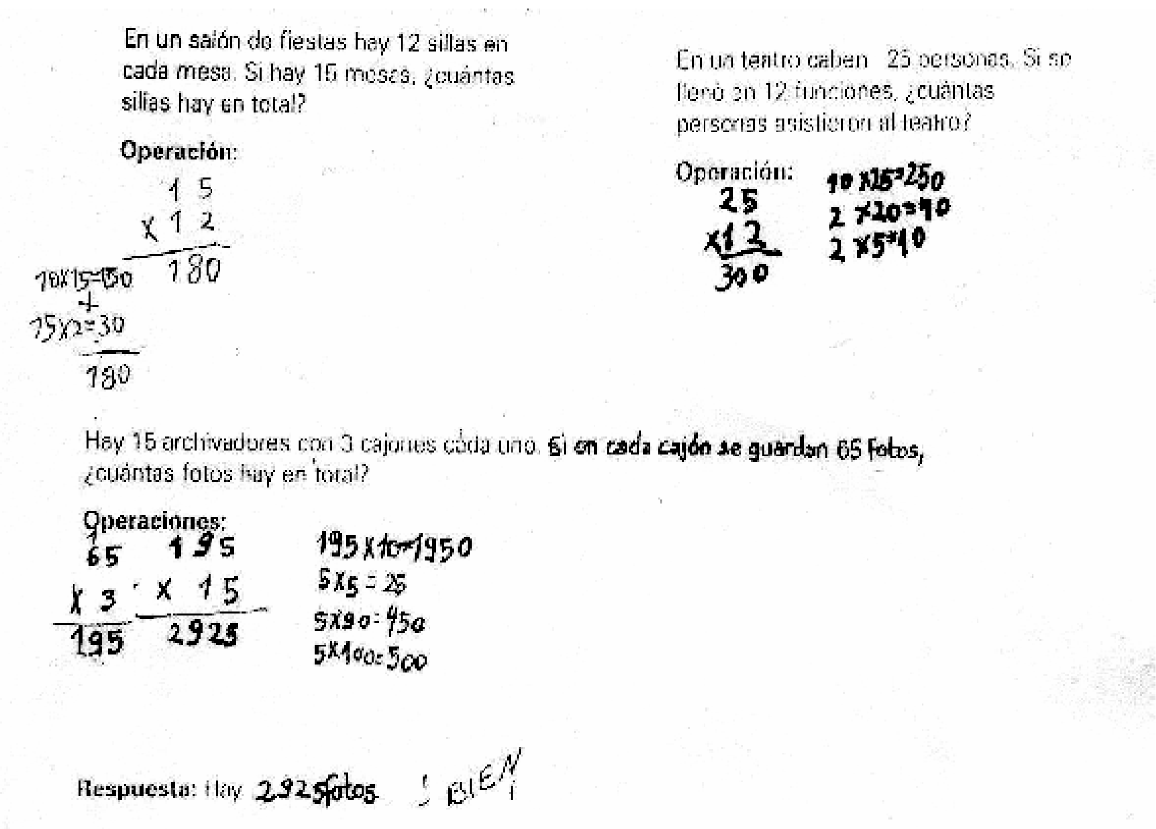
Lo anterior es equivalente al algoritmo convencional, que se puede presentar como una forma de representar los cálculos anteriores.





Algunas formas de resolución:

En los siguientes ejemplos de 3º año, se ve cómo los niños realizan descomposiciones que les permiten con multiplicaciones más sencillas, resolver las multiplicaciones más complejas. (DGCyE 2001)


En un salón de fiestas hay 12 sillas en cada mesa. Si hay 15 mesas, ¿cuántas sillas hay en total?

Operación:

15
x 12
180

10x15=150
+
15x2=30
180

En un teatro caben 25 personas. Si se llenó en 12 funciones, ¿cuántas personas asistieron al teatro?

Operación:

25
x12
300

10 x25=250
2 x20=40
2 x5=10

Hay 15 archivadores con 3 cajones cada uno. Si en cada cajón se guardan 65 fotos, ¿cuántas fotos hay en total?

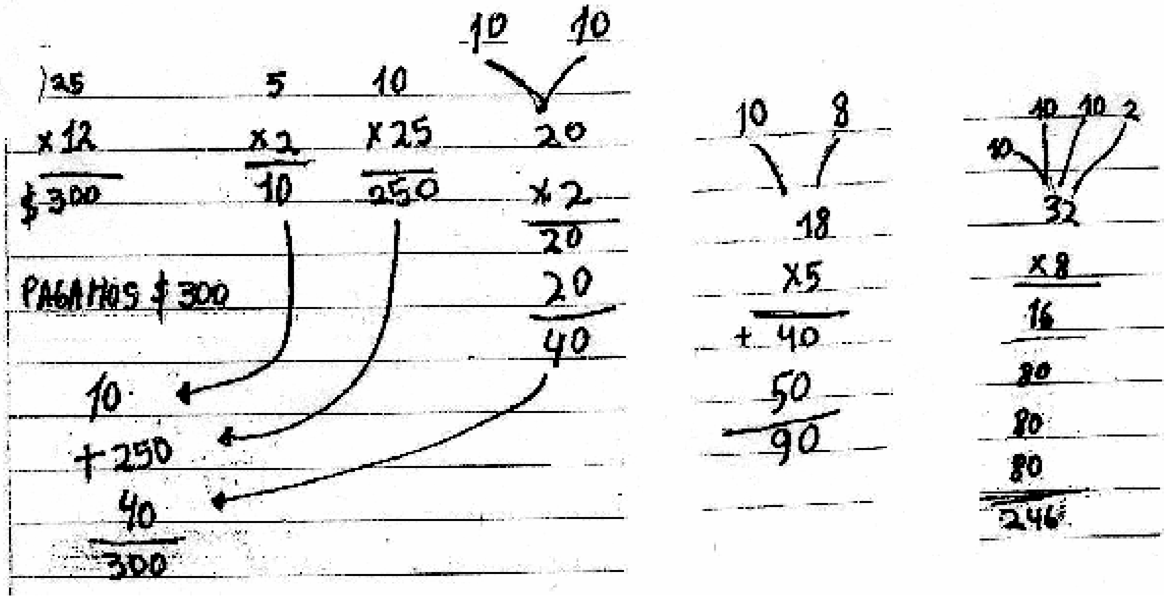
Operaciones:

65
x 3
195

195
x 15
2925

195x10=1950
5x5=25
5x90=450
5x100=500

Respuesta: Hay 2925 fotos ¡ BIEN



Las estrategias de cálculo mental permiten que los alumnos puedan reflexionar sobre las propiedades de las operaciones al finalizar el segundo ciclo.

Algunas actividades que se utilizan con este objetivo.

1) "¿Cómo hacer 25 x 20 en la calculadora si no funciona la tecla del 0?" O bien: "¿Cómo hacer 6 x 5 x 7 x 9 x 10 utilizando una sola vez la tecla x?", etc.

Resolver estos problemas requiere del uso de propiedades.

2) El análisis sobre la utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma en estos cálculos, permite comprender la no necesidad de “dejar el lugar” cuando multiplican por dos cifras, o la arbitrariedad de iniciar el cálculo por las unidades. Por ejemplo, son cálculos equivalentes y válidos:

450
x 14
1800 (4 x 450)
4500 (10 x 450)
6300

450
x 14
4500 (10 x 450)
1800 (4 x 450)
6300

Ambos algoritmos podrán “convivir” en la clase. Será interesante que los alumnos conozcan que usualmente - al menos desde hace unos siglos, en algunos países, y por ahora - se inicia el cálculo por las unidades, o que se “deja un lugar” en el producto de las decenas, aunque ambas cuestiones no sean únicas ni necesarias. Apuntamos a que nuestros niños dominen las razones que subyacen a los cálculos que utilizan, y que sepan también que han existido y sobreviven diferentes formas de calcular según los tiempos y las culturas.

Actividad 13 (de autocorrección)
Antes de avanzar con la lectura del módulo realice la siguiente actividad.

- Analicen cómo se presenta habitualmente la regla acerca del desplazamiento de un lugar a la izquierda del segundo producto, en la cuenta de multiplicación por dos cifras.
- Establezcan las razones matemáticas por las que funciona dicha regla y en consecuencia, qué tipo de intervención debería hacer el maestro en caso de que sus alumnos cometieran el error de no desplazar la cifra.

Es una realidad frecuente que al preguntarle a alumnos de 2º ciclo acerca de las razones por las que el segundo producto hay que desplazarlo un lugar a la izquierda, nos encontremos con que muchos contestan *“no sé, la maestra me dijo”; “a mí me lo enseñaron así*”. A eso llamamos contestar desde la “fe”.

Es un problema de la enseñanza y no necesariamente del aprendizaje, el que esos alumnos no puedan disponer del conocimiento que les permitiría argumentar que como están multiplicando por una decena, nunca podrían obtener como resultado una unidad. Desde el trabajo matemático que tratamos de transmitir, también esperamos que esos mismos alumnos puedan extender ese conocimiento y reutilizarlo, para poder argumentar, que si se multiplica por un número de tres cifras, habrá que correr el tercer producto hasta el lugar de las centenas, y así siguiendo.

Problemas multiplicativos y sentidos del producto

Hasta ahora hemos prestado especial atención al cálculo de los productos de diferentes maneras, pero hay diversos problemas multiplicativos que es necesario analizar. Si los alumnos no son expuestos a su resolución, no serán capaces de reconocer el campo de aplicabilidad del producto y, por lo tanto, no podremos decir que dominan el concepto de multiplicación.
Cada uno de estos “tipos” de problemas constituye un sentido de la multiplicación.

Actividad 13 (para analizar en el encuentro presencial)
Analice las semejanzas y diferencias que encuentre entre los siguientes problemas:

1. Si cada paquete tiene 5 figuritas, ¿cuántas figuritas se obtienen con 7 paquetes?
2. Completar la siguiente tabla que relaciona la cantidad de cajas que se compran con el precio a pagar:

Cantidad de cajas	1	2	5	8	10		15		30
Precio a pagar (en $)	5					55		115	

3. Si entran 8 botellas en cada cajón, ¿cuántos cajones hay que preparar para que puedan guardarse 20 botellas?
4. Una cinta fue cortada en 5 tiras iguales de 24 cm. cada una, ¿cuánto medía la cinta?
5. Un paquete con 4 sándwich cuesta $7. ¿Cuánto cuestan 16 sándwich?
6. 20 kilos de papa cuestan $54. ¿Cuánto cuestan 45 kilos?
7. En una jarra se prepara jugo con 4 tapas de concentrado y 2 vasos de agua y en otra jarra se prepara jugo con 12 tapas del mismo concentrado y 10 vasos de agua. ¿Cuál de los dos jugos es más concentrado?
8. La etiqueta de una lata de pintura indica que con un litro de esa pintura se pueden pintar 4 m2. Sebastián calculó que con 25 latas puede pintar 80 m2. ¿Cuál es el contenido de cada lata de pintura?
9. Federico tiene que cambiar la cerámica de un sector del baño: es un rectángulo de 5 filas de 7 piezas cada una. ¿Cuántas piezas tiene que cambiar?
10. ¿Cuánto mide el área de un patio de 5 m de ancho y 7 m de largo?
11. Un campo rectangular tiene un área de 12.000 m2. Si mide 40 m de ancho, ¿cuánto mide de largo?
12. “Voy a comprarme un helado de dos gustos. Si quiero combinar una fruta y un dulce, ¿cuántos helados diferentes puedo elegir.

Frutas	Dulces
Limón	Crema
Frambuesa	Chocolate
Durazno	

Gérard Vergnaud (1982) ha desarrollado un análisis de los problemas multiplicativos mediante el cual elaboró una clasificación de estos problemas basada en su estructura matemática y los razonamientos que involucra su solución. Un aporte que ha realizado este investigador es haber mostrado las relaciones entre la multiplicación y la división, y en habernos enseñado acerca del nivel diferente de complejidad que las distintas clases de situaciones suponen para los niños.

En síntesis, la idea de campos conceptuales de Vergnaud[8], nos permite tomar en cuenta un recorte amplio de conceptos ligados a estas operaciones en relación unos con otros, e inscribir su aprendizaje en un extenso período de tiempo que supera ampliamente un ciclo escolar. El

[8] Campos conceptuales: conjunto de situaciones, conceptos, relaciones, operaciones de pensamiento, representaciones, relacionados unos con otros.

campo conceptual multiplicativo incluye todas las situaciones que se requieren para la resolución de una multiplicación, de una división o de una combinación de ambas operaciones.

En función de lo anterior, analicemos los problemas de la actividad 13 identificando las clases de situaciones multiplicativas que distingue este autor:

a) Problemas de proporcionalidad

En los ejemplos que hemos presentado se han incluido algunos problemas en los que intervienen relaciones de proporcionalidad. Si analizamos los libros de texto de Primer Ciclo, podremos observar que son los que aparecen con mayor frecuencia pero, sin embargo, no son considerados como problemas de proporcionalidad.

No es nuestra idea, ni la del Diseño Curricular, que se analice explícitamente esta relación con los alumnos de primer ciclo, pero sí es importante tener en cuenta esta relación para retomarla cuando la proporcionalidad sea objeto de estudio en el segundo ciclo. Allí será necesario avanzar en la explicitación de las propiedades de la proporcionalidad.

Se denomina de esta manera a toda una clase de problemas de multiplicación y división en los cuales intervienen dos universos de elementos (por ejemplo, personas y dinero) que se vinculan entre sí a través de una relación constante (por ejemplo, 5 pesos por persona).

En los problemas de proporcionalidad simple, participan dos magnitudes diferentes relacionadas entre sí de manera directamente proporcional. Esta característica diferencia a los problemas de multiplicación y división de los de suma y resta, como ya vimos.
En esta clase de problemas, es posible ubicar diferentes problemas, de complejidades diversas en los que se cumplen una serie de relaciones vinculadas con las propiedades de la proporcionalidad:

- La relación proporcional permite pasar de una magnitud a la otra mediante una multiplicación (En el problema 1 por ejemplo, 7 paquetes x 5 figuritas por paquete da como resultado la cantidad total de figuritas). De esta manera (multiplicando por 5), se podría conocer la cantidad de figuritas correspondiente a cualquier cantidad de paquetes. Este procedimiento se basa en la constante de proporcionalidad que existe en estos problemas, un coeficiente multiplicativo que permite pasar de los valores de una magnitud a los valores correspondientes de la otra magnitud. En general, esta relación no es utilizada de manera inmediata por los alumnos; es necesario reconocerla en el contexto de las situaciones que se trabajan con ellos. Más adelante, en el segundo ciclo, cuando se analicen explícitamente las propiedades de la proporcionalidad, se retomará como característica de estas situaciones.

- Sumando las cantidades de figuritas correspondientes a 7 paquetes y a 4 paquetes, es posible conocer la cantidad correspondiente a 11 paquetes. De la misma manera, restando la cantidad de figuritas correspondiente a 2 paquetes a la cantidad correspondiente a 10 paquetes, se conoce la cantidad de figuritas correspondiente a 8 paquetes. Los aspectos aditivos de la proporcionalidad podrían resumirse coloquialmente del siguiente modo: “a la suma de valores de una magnitud, le corresponde la suma de los valores correspondientes de la otra magnitud; a la resta, le corresponde la resta”. Dependen de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y de la resta:

  $$11 \times 5 = 7 \times 5 + 4 \times 5$$

  $$8 \times 5 = 10 \times 5 - 2 \times 5$$

- Si se multiplica por un número la cantidad de paquetes (por ejemplo para 21 paquetes el triple de 7 paquetes), se puede conocer la cantidad de figuritas correspondiente multiplicando por el mismo número las figuritas correspondientes a 7 paquetes (o sea, el triple de 35). Coloquialmente se dice: a la mitad (tercera parte, etc.) de paquetes, le corresponde la mitad (tercera parte, etc.) de figuritas, al doble el doble, etc. Estas relaciones dependen de la propiedad asociativa de la multiplicación:

$$3 \times 7 \times 5 = 21 \times 5$$

$$3 \times 7 \times 5 = 3 \times 35$$

Actividad 14 (para analizar en el encuentro presencial)
Utilice las relaciones descritas más arriba para identificar diferentes estrategias que permitan resolver los problemas de proporcionalidad de la actividad Nº 13.

b) Problemas de proporcionalidad simple compuesta

En estos problemas se componen al menos dos relaciones de proporcionalidad simple. Por ejemplo, el problema 8.
Intervienen tres magnitudes diferentes (latas, litros de pintura, área a cubrir) y dos relaciones de proporcionalidad simple: una, entre los litros de pintura y el área a cubrir; otra, entre la cantidad de latas y el área a cubrir. En consecuencia, implícitamente se pone así en relación la cantidad de latas y la cantidad de litros de pintura. El problema requiere vincular las dos primeras relaciones para poder establecer la tercera.

Es posible resolver los problemas de proporcionalidad compuesta apelando a la diversidad de procedimientos válidos para los de proporcionalidad simple, ocupándose de manera sucesiva de las dos relaciones de proporcionalidad simple que aquí aparecen. Estos problemas, abordables en el segundo ciclo de la enseñanza primaria, presentan además de la complejidad de la organización de los datos a relacionar entre sí, la correspondiente a las decisiones sobre los pasos intermedios a realizar.

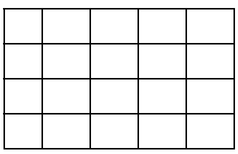
c) Problemas de tipo “producto de medidas”

Se trata de casos particulares de proporcionalidad doble o múltiple. En estas situaciones, una de las magnitudes que intervienen es el producto de las otras dos y varía proporcionalmente a esas dos que son, por su parte, independientes una de otra. Los diferentes problemas de combinatoria y los problemas de configuraciones rectangulares forman parte de esta categoría.

c.1) Problemas de organizaciones rectangulares

Otro tipo de problemas multiplicativos posibles de ser presentados desde el primer ciclo, son aquellos que involucran organizaciones rectangulares. Por ejemplo, problemas de baldosas, de filas y columnas (como los de asientos del cine, butacas para un acto escolar, departamentos en un portero eléctrico, etiquetas u ojalillos que vienen en una plancha, etc.).

Otro ejemplo de este tipo de problemas es el número 9. Inicialmente los niños los resolverán contando uno en uno, luego sumando por filas o columnas y finalmente
- luego del trabajo dirigido al análisis de dichos problemas y de los recursos posibles -, podrán resolverlos multiplicando. Muchos niños que reconocen la multiplicación para los problemas de series proporcionales (¿cuántas figuritas hay en 4 paquetes si tienen 5 figuritas cada una?) no la reconocen para problemas con los mismos números en problemas de organizaciones rectangulares. Por ejemplo en el problema “¿cuántas baldosas hay en un patio como éste?”



Una herramienta didáctica para provocar el avance de los procedimientos de conteo hacia los procedimientos de multiplicación, es el aumento de las cantidades. La dificultad que se les presenta a los niños en contar una gran cantidad de cuadraditos (un cuadro de 12 cuadraditos por 5 por ejemplo), favorecerá que algunos alumnos registren al lado de cada fila o columna las cantidades parciales (5, 5, 5, 5, etc. o bien 12, 12, 12, etc.) y que luego sumen para obtener el total.

En el segundo ciclo, los problemas de organizaciones rectangulares podrán ser un buen punto de partida para el estudio de las propiedades de la multiplicación. Por otra parte, este tipo de situaciones podrá permitir ser una base hacia el posterior estudio en quinto o sexto año, de la multiplicación como medio de cálculo en problemas de superficie como por ejemplo, el problema 10.

Cuando en estos problemas la incógnita recae sobre alguna de las dos dimensiones, nos encontramos con problemas de división como en el problema 11.

Es importante tener en cuenta, a la hora de organizar y secuenciar la enseñanza de este aspecto de la multiplicación, que los problemas de distribuciones rectangulares de una colección de objetos (cuadraditos, botones en un portero eléctrico, sillas en un teatro, casilleros de un tablero, botellas en un cajón, etc.), son de menor complejidad que los que involucran magnitudes continuas como el área. En los del primer tipo, es posible realizar el conteo uno en uno de los elementos por estar estos diferenciados y distribuidos en una configuración determinada: en filas y columnas. En cambio, en los problemas de medición de áreas, las unidades a contar no están previamente definidas, y las debe establecer el niño respetando, además, las convenciones propias de la medición.

c.2) Problemas de combinatoria

Otros problemas multiplicativos que los niños pueden empezar a resolver en primer ciclo son aquellos en los que hay que combinar elementos de diferentes colecciones[9]. Por ejemplo, el problema 12.

A partir de los procedimientos que los niños utilicen, se podrá trabajar en clase cómo garantizar que pusieron todas las opciones. Luego de las primeras producciones, se les puede proponer organizar la información en un cuadro de doble entrada o en un diagrama de árbol.

Luego de varios problemas, los niños podrán utilizar progresivamente estrategias que les permitan organizar la información, y “no olvidarse“de ninguna posibilidad. Posteriormente, se analizará con los alumnos la pertinencia de resolverlos por medio de una suma como 2 + 2 + 2, o bien 3 + 3, y finalmente reconocer que las escrituras 2 x 3 ó 3 x 2 también representan el problema. Estos cálculos pueden ser propuestos por los alumnos o incorporados por el docente para someterlos a análisis.

Este tipo de problemas, permite poner en juego un aspecto del quehacer matemático no siempre tenido en cuenta: el criterio de exhaustividad. Es decir, ¿cómo estar seguros de que esos son todos los casos posibles?

A medida que se avanza en la escolaridad, la multiplicación pasa a ser un objeto de estudio en sí misma.

Actividad 15 (para analizar en el encuentro presencial)
Resuelva de dos maneras diferentes el siguiente problema: *Jacinta, Lucía, Mercedes, Ángeles e Inés quieren sacarse una foto sentadas una al lado de la otra.*

[9] Para ampliar sobre la enseñanza de problemas de combinatoria en el primer ciclo consultar: *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB*, Publicado por la DGCyE en 2001, y para el segundo ciclo Documento Nº 4 publicado por el Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires en 1997.

¿Cuántas fotos diferentes necesitan sacarse si quieren aparecer en todas las diferentes posiciones posibles?

d) Problemas que involucran la multiplicación como objeto matemático.

Al finalizar el Segundo Ciclo, es importante que los alumnos se enfrenten a situaciones que permitan identificar nuevos aspectos relevantes de la relación a x b = c, donde a, b y c son números naturales. El objetivo *no es* hacer hincapié en los problemas de cálculo ligados a los algoritmos, ni en su carácter de herramienta para resolver una amplia gama de situaciones -ambos aspectos trabajados en el primer y segundo ciclo-, sino concebir a la multiplicación entre números naturales como objeto de reflexión en sí mismo. Esto implicará plantear la resolución de problemas que exijan un análisis de las relaciones entre los distintos elementos que forman parte de esta operación. Por otro lado, considerando la familiaridad que los alumnos tienen con los números naturales, este tipo de trabajo constituye un buen punto de apoyo para abordar el tratamiento de lo general.
Algunos problemas que abordan estas cuestiones son los siguientes:

1) Se sabe que el producto de dos números es 60. ¿Cuál será el resultado si...

a) se duplica uno de los factores?
b) ¿y si uno de los factores se reduce a la mitad?
c) ¿y cuál si uno se duplica y el otro se reduce a la mitad?
d) ¿es necesario conocer los valores de a y b para responder las preguntas anteriores?

2) Usando que 218 × 42 = 9156, encuentren el resultado de cada uno de los siguientes cálculos *sin hacer la cuenta*:

a) 218 × 21 b) 109 × 42 c) 9156 ÷ 42 d) 9156 ÷ 21 e) 9156 ÷ 420

Estos problemas tienen varias finalidades. Por un lado, exige a los alumnos "leer" información de una expresión aritmética; pero a su vez, para poder resolverlo es preciso concebir a la división como inversa de la multiplicación, y poder explicitar aquellas descomposiciones que permiten encontrar los resultados de los cálculos propuestos.

No es esperable que los alumnos apelen a estas relaciones desde un comienzo. Es probable que en un principio los alumnos desplieguen recursos más vinculados a la exploración, lo cual dará lugar a ensayos y conjeturas. Será parte de la tarea del docente promover la explicitación por parte de los alumnos de las diferentes maneras de reconocer el cálculo dado en el cálculo propuesto, para lograr utilizar la información que propone el problema.

Será también pertinente alentar a los alumnos a explicitar las razones en las que se apoyan para proponer el resultado, sin que ello signifique esperar justificaciones formales cuyo sentido no puede comprenderse a esta altura de la escolaridad.

El objetivo es que los alumnos puedan usar el conocimiento como medio de anticipación y validación.

Este tipo de problemas, junto a otros que aborden el concepto de múltiplo por ejemplo, servirán para sentar las bases de un trabajo que apunte a la lectura de información que porta una expresión.

Resulta importante organizar grupos de docentes, y asignar a cada grupo uno de los problemas que incluimos en este apartado, solicitando un análisis como el siguiente.

Actividad 16 (para analizar en el encuentro presencial)
1. Resuelva los problemas 1) y 2) y analícelos considerando:
- conocimientos necesarios para abordarlo
- posibles procedimientos de resolución

- posibles errores que puedan surgir
- posibles validaciones por parte de los alumnos

Actividad 17 (de autocorrección)

- Revise su planificación y verifique si incluye todos los tipos de problemas de multiplicación descritos.

La enseñanza de la división

Actividad 18 (de autocorrección)
Le proponemos analizar las siguientes afirmaciones sobre aspectos que nos interesa destacar en la enseñanza de la división. Registre sus opiniones para retomarlas más adelante.

- Los problemas de división pueden ser resueltos por una variedad de procedimientos y operaciones.
- El dominio del algoritmo no garantiza reconocer sus ocasiones de empleo en distintos tipos de problemas.
- El algoritmo es solamente un recurso de cálculo (y no necesariamente el principal) que los niños deben aprender en la escuela.
- Si no hay instancias de reflexión y validación acerca de las razones por las que el algoritmo funciona como funciona, su aprendizaje carecerá de sentido.
- Es necesario que existan instancias de sistematización y estudio sobre la división, organizadas y conducidas por el docente
- El estudio de la división es de tal complejidad que exige muchos años de la escolaridad. Su enseñanza abarca también la ESB.

Problemas de división: diferentes sentidos

a) Problemas de medir o partir:

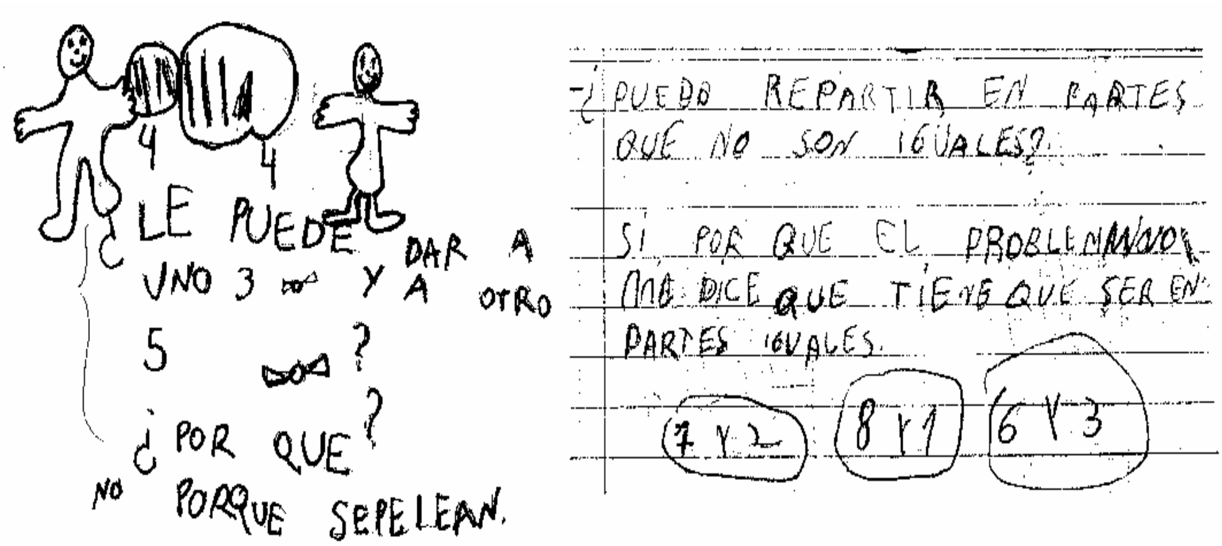
De la misma manera que con la multiplicación, la enseñanza de la división puede iniciarse desde 1º año. Que los alumnos se enfrenen desde los primeros años de escolaridad a este tipo de problemas les permite, por una parte, aprender a elaborar estrategias propias de resolución de problemas cuando no tienen aún disponible un recurso económico y, por otra parte, abona al proceso de construcción del sentido de dicha operación.

En 1º año se puede trabajar con problemas de reparto, incluyendo algunos en los que el reparto no es necesariamente equitativo. La finalidad está en lograr que los niños analicen, frente a los enunciados de los problemas, si hay o no una restricción de reparto equitativo. Leer enunciados, revisarlos, transformarlos, considerar la cantidad de soluciones posibles, etc. forma parte de la tarea de aprender a resolver un problema[10].

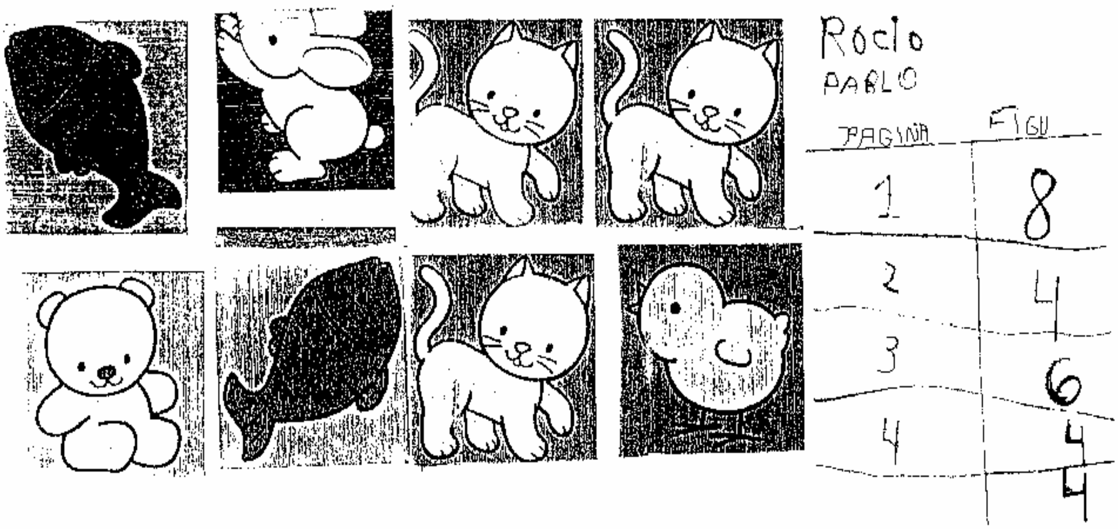
Por ejemplo: *un señor tiene 8 caramelos y se los da a dos niños ¿Cuántos les da a cada uno?* La mayor parte de los niños contestó que eran 4 para cada uno. La maestra preguntó entonces si era posible darle 5 a uno y 3 a otro. Al principio los niños comentan que sería injusto. La maestra les propone releer el problema para analizar si es posible desde el enunciado. Como el mismo no dice nada acerca de la equitatividad del reparto, les pregunta qué debería decir el

[10]DGCyE. O*rientaciones Didácticas para la enseñanza de la división en los tres ciclos de la EGB*. Dirección de Educación General Básica. DGCyE. La Plata. 2001.

mismo para que “sí o sí deban recibir la misma cantidad”. Los alumnos sugieren agregar al enunciado *en formas iguales.*. Esto es registrado en los cuadernos.

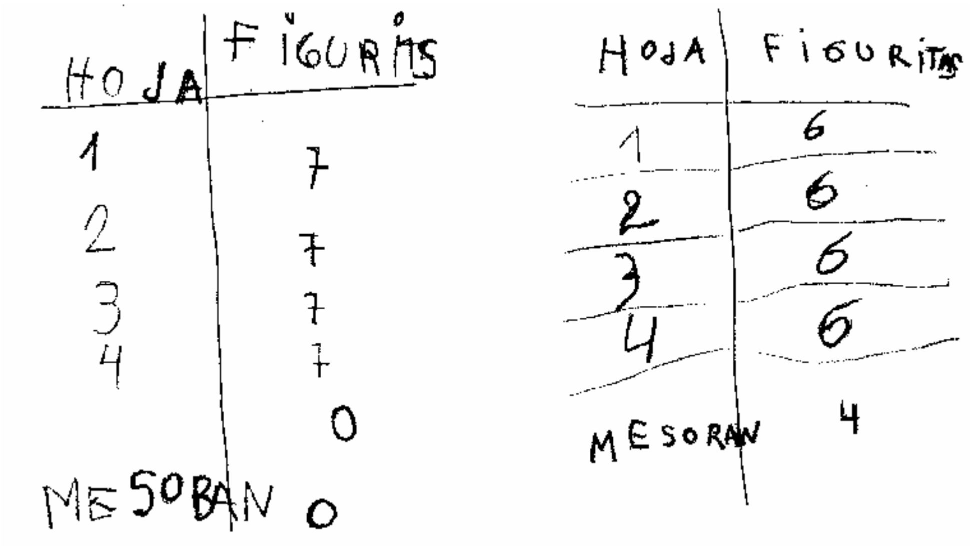


En otro problema de 1º año, los chicos tenían que pegar figuritas en un pequeño *álbum casero* de 4 páginas. En la contratapa, había una hoja en blanco para anotar en un cuadro de doble entrada cuántas figuritas se pegaban en cada página y cuántas sobraban. La primera vez se les entregó a cada grupo un álbum y 22 figuritas. Los niños las empezaron a pegar llenando la primera página con muchas y el resto en las siguientes. Por ejemplo, Rocío y Pablo llenaron así su álbum:



La segunda consigna fue diferente: se les entregó a cada grupo un nuevo álbum y 28 figuritas con la consigna de que pegaran todas las figuritas, pero que esta vez hubiera la misma cantidad en cada página. Esta restricción les exigía pasar de un procedimiento improvisado de pegado, hacia la necesidad de realizar una anticipación de cuántas pegar en cada página.

Algunos niños logran pegar 7 en cada hoja utilizando un procedimiento de reparto de 1 en 1, como Nazarena y Micaela, o de 2 en 2 como Magalí.

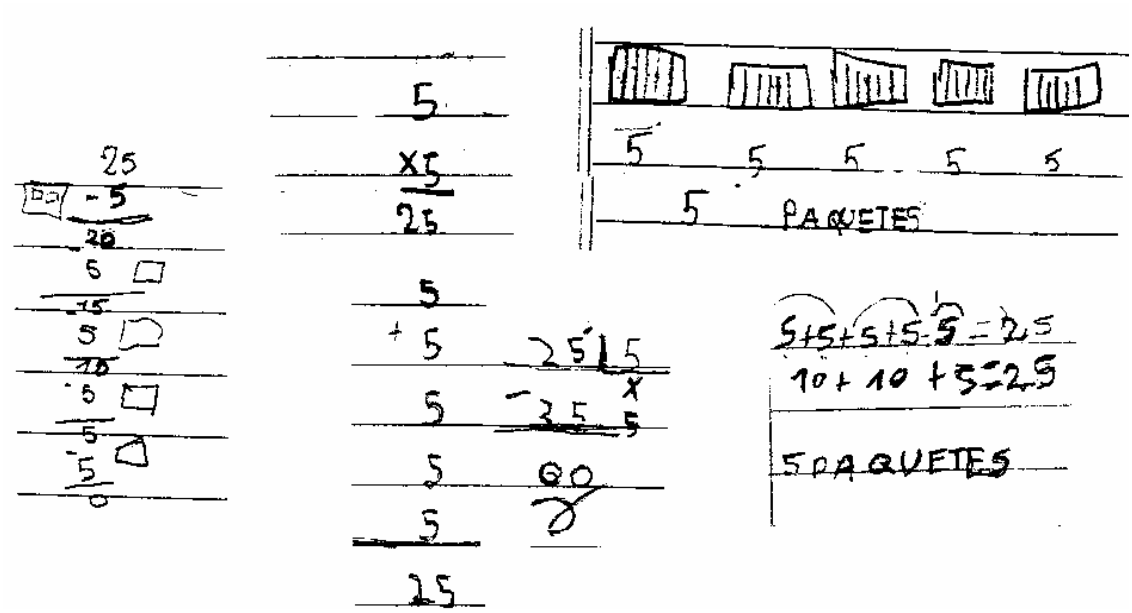


Otros niños pegan 6 en cada uno y escriben que les sobran 4, como Tomás y Jazmín.

Luego, la docente plantea a toda la clase *si se pueden seguir repartiendo las figuritas que sobran.* A partir de esta intervención, se promueve un intercambio colectivo, producto del cual se arriba a la conclusión de que 7 es la respuesta correcta.

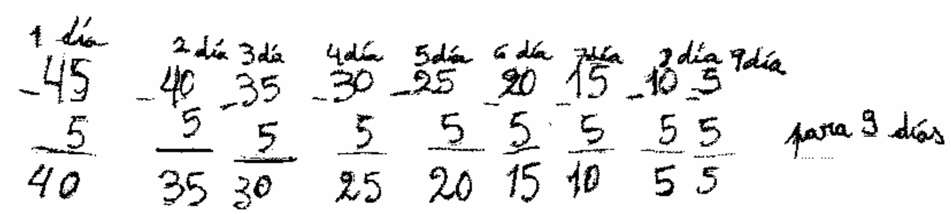
Nos parece importante resaltar que en esta clase, como sucede en tantas otras, hubo muchos niños que obtuvieron resultados erróneos. Aquí no se trata de cómo “corregir” los errores que aparecieron, sino considerarlos motor de debate y avance para todos.

En 3º año se resolvió este problema: *Mi mamá donará una torta para la fiesta. Para hacerla necesita 25 galletitas de chocolate. Si cada paquete tiene 5, ¿cuántos paquetes necesita?* (DGCyE 2001). Algunos niños dibujan, otros suman, otros restan, otros multiplican y hasta algunos producen una escritura próxima a la división:

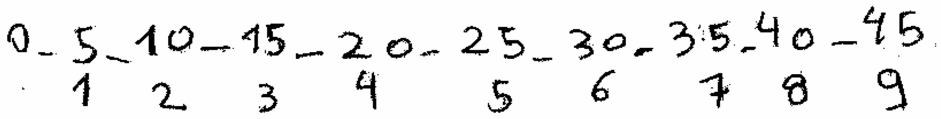


En 2º año se puede proponer el siguiente problema: *Tengo $ 45, gasto $5 por día. ¿Para cuántos días me alcanza?* Los niños resuelven este problema apelando a diversos recursos como restas sucesivas, conteo de 5 en 5 hasta llegar a 45, etc.

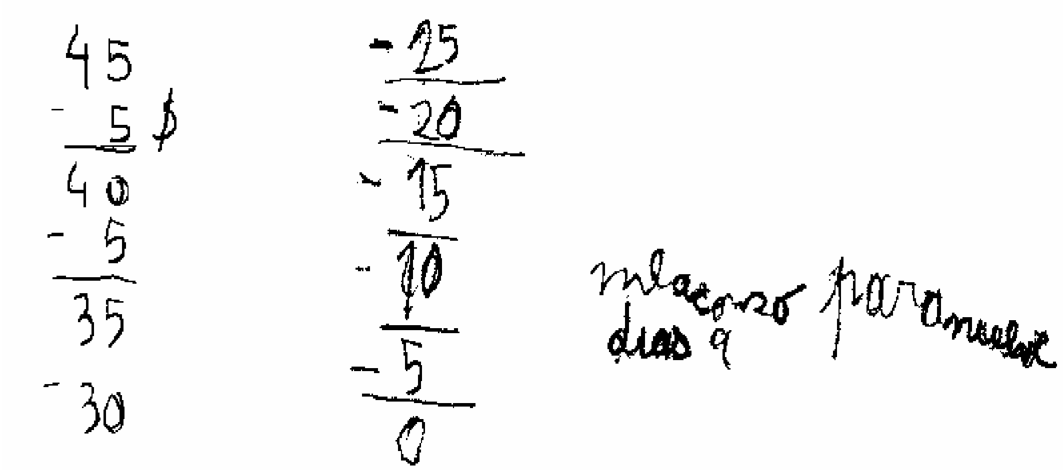
Cristian hace lo siguiente:



En cambio, Franco:



Diego comienza haciendo restas sucesivas y cuando llega a 30 se da cuenta de que no precisa escribir las restas, anotando directamente los números al descontar de 5 en 5.



> **Actividad 19** (de autocorrección)
> Dimos más arriba (actividad 18) una serie de afirmaciones como un modelo posible de guía de análisis en la que el docente se pudiera apoyar para repensar la enseñanza de la división. Revise las conclusiones a las que llegó en el momento de su lectura, a la luz de los procedimientos de los alumnos incluidos más arriba, y las vinculaciones que estos tienen con los tipos de problemas que se les plantearon.

b) Problemas de reparto

En los problemas que hemos analizado más arriba, se trata de averiguar el valor del número de partes después de realizado el reparto. Analicemos ahora otro tipo de problemas de división:

> **Actividad 20** (para analizar en el encuentro presencial)
> ¿En qué cambiarían los procedimientos de los chicos y cuáles serían las razones matemáticas de esos cambios si modificáramos el problema *tengo $ 45, gasto $5 por*

día. Para cuántos días me alcanza? del siguiente modo?: *"Tengo $ 45 para gastarlos en 5 días. ¿Cuánto puedo gastar por día si todos los días gasto lo mismo y lo gasto todo?*

Nos interesa particularmente, a través del segundo problema, plantear el problema de la restricción de la suma y la resta cuando se trata de buscar el valor de cada una de las partes al realizar el reparto (cuánta plata puedo gastar en cada uno de los 5 días hasta agotar los $45). ¿Se podrían hacer restas sucesivas como 45 – 5? En ese caso, ¿qué significa el número 45 dentro del problema? ¿Y el número 5? ¿Se puede restar 5 días a 45 pesos? ¿El resultado 40, significaría pesos o días?

En este tipo de problemas solo pueden utilizarse procedimientos ligados al campo multiplicativo. Por ejemplo, aproximaciones por producto:

1 día	$10
2 días	$20
...	...
5 días	$50 me pasé.

Por tanteo y error probando con otros números, llegar a que cada día gasta $9.

Otro procedimiento posible sería que dibujen una representación de los 5 días y realicen un reparto uno a uno hasta agotar los 45:

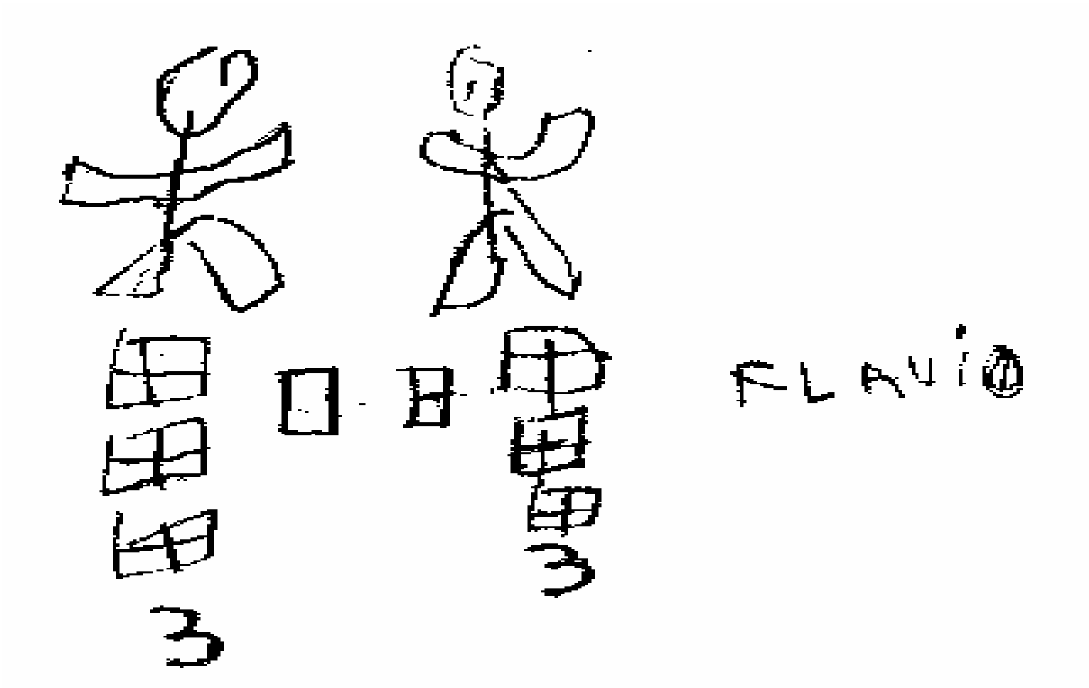
xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx	xxxxxx xxx

Es importante poder distinguir entre estos dos tipos de problemas porque como vimos, los procedimientos posibles de ser utilizados por los alumnos son también diferentes.
Una manera de facilitar la distinción de los dos tipos de problemas es identificar que en los problemas de medir o partir en los que se busca el valor del número de partes, después de realizado el reparto, las cantidades expresadas en los datos están asociadas al mismo universo empírico ($45 y $5). En cambio en los problemas de repartir en los que la solución plantea la búsqueda del valor de cada una de las partes, las cantidades refieren a distintos universos empíricos (45 pesos y 5 días).

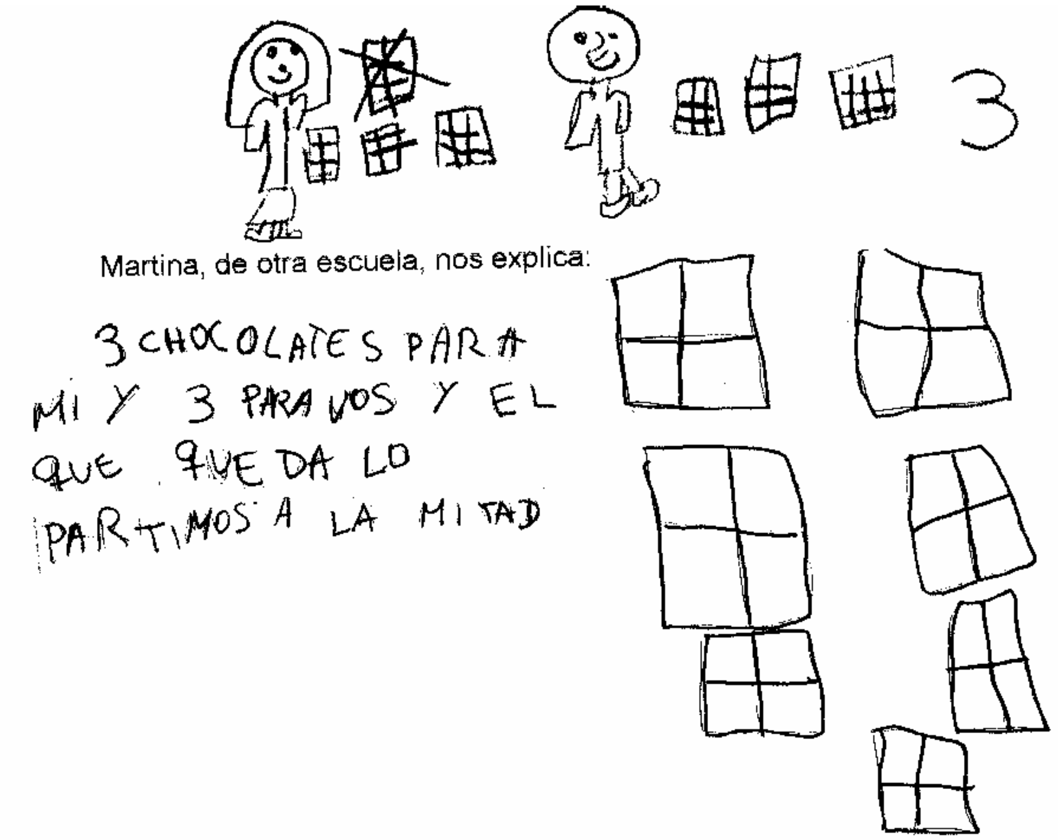
Otro tipo de trabajo que incide en la construcción con sentido de esta operación está relacionado con decidir si el resto es fraccionable o no. En 1º año se les plantea a los alumnos un problema en el que hay que repartir 7 chocolates entre 2 chicos, y otro en el que hay que repartir globos con el objetivo de promover la discusión acerca de que *los chocolates se pueden partir, pero no lo globos.*

Algunas estrategias: *en el primer problema muchos alumnos decidieron repartir los chocolates en partes iguales y el que sobraba no dárselo a ninguno de los dos. Otros alumnos decidieron darle el que sobraba en mitades iguales a cada uno de los niños. Manifestaron que podían hacerlo dado que eran chocolates y se pueden partir a la mitad. En el segundo problema también repartieron en partes iguales, y el globo que sobró dijeron no poder repartirlo porque se reventaría.*

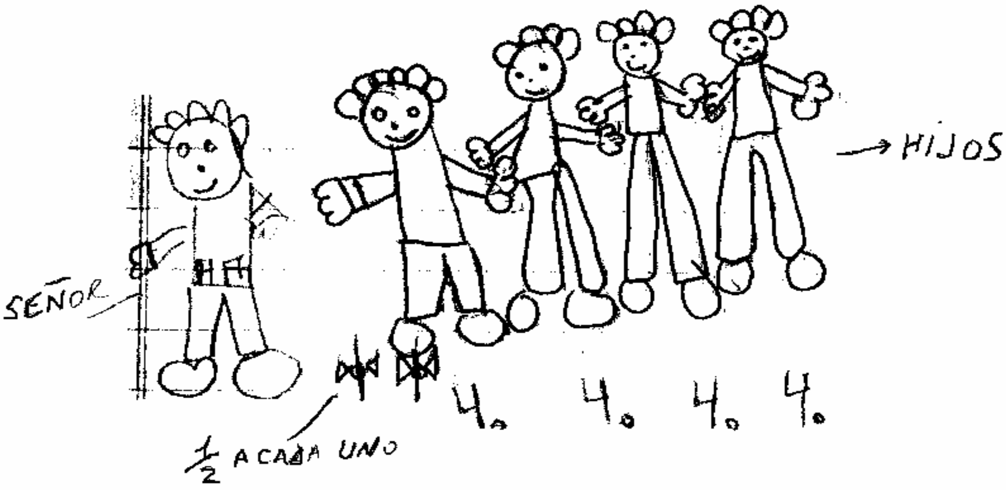
Por ejemplo, Flavio escribe primero 3 chocolates, y luego dibuja medio más para cada uno.



Belén reparte 4 a uno y 3 a otro, y luego tacha uno de los chocolates repartidos para que queden iguales.



2º año: *Un señor tiene 18 caramelos y quiere repartirlos en partes iguales para sus 4 hijos. ¿Cuántos le dará a cada uno?* Agustina realiza una partición del resto:



En el apartado anterior nos referimos a problemas de repartir equitativamente, de partir o medir y de fraccionar restos, que constituyen sentidos de la división. Además de estos problemas podemos identificar los siguientes.

c) Problemas de organizaciones rectangulares[11]

Así como para resolver un problema como el siguiente*: En un teatro hay 32 filas de butacas. Si en cada fila hay 18 butacas. ¿Cuánta gente sentada entra?* es pertinente recurrir a la multiplicación, la división también es una herramienta válida para resolver problemas que impliquen organizaciones rectangulares.

> **Actividad 21** (para analizar en el encuentro presencial)
> Transformar el problema anterior para que se pueda resolver con una división.

Como habrá podido verificar, un problema de multiplicación puede transformarse en uno en el que sea pertinente resolver a través de una división, cambiando el lugar de la incógnita.

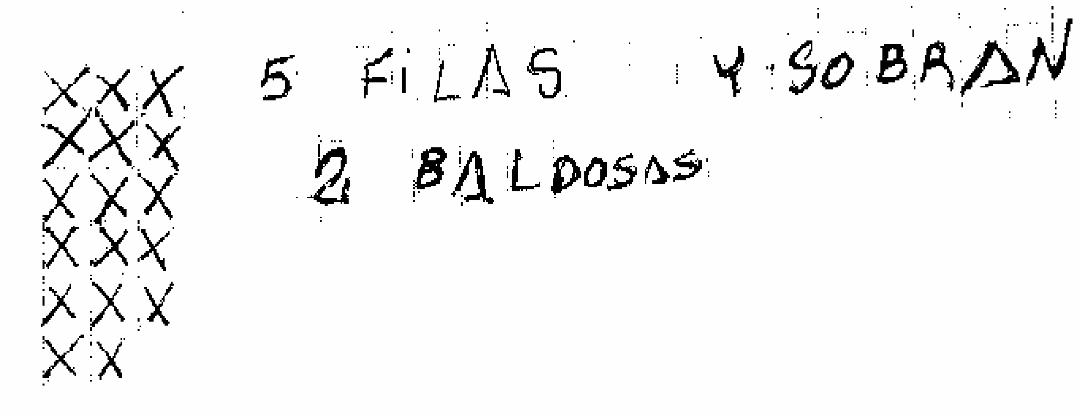
Analicemos a continuación diferentes estrategias que utilizan los niños al enfrentarlos con este tipo de problemas:

Ejemplo 1:

2º año: *Tengo 17 baldosas para armar un patio rectangular. Si pongo 3 baldosas en cada fila. ¿Cuántas filas puedo armar? ¿Cuántas baldosas sobran?*

Por ejemplo, un grupo recurre al dibujo:

[11] Broitman, C. e Itzcovich; H. Ob. Cit.



En otro grupo, inician el proceso de resolución del primero de estos problemas a través del dibujo; luego realizan un cálculo de sumas reiteradas y anotan a continuación la suma del resto para reconstruir el total de 23.

Si bien no es objetivo de segundo año el estudio de los recursos de cálculo de la división, los niños tienen herramientas diferentes que les permiten resolver estos problemas. Del mismo modo que hemos señalado para los problemas de reparto y partición, es parte del estudio de esta operación en el primer ciclo la resolución de problemas de este tipo por medio de procedimientos diversos (en este caso dibujos inicialmente, y luego sumas, restas o multiplicaciones).

Ejemplo 2:

3º año: Armar un patio rectangular con 36 baldosas poniendo 5 baldosas en cada fila ¿Cuántas filas va a tener el patio?

Para resolver este tipo de problemas, muchos alumnos recurren al dibujo de los patios.

A continuación sus docentes les solicitan que busquen cálculos que representen la situación. Producen allí multiplicaciones y sumas organizadas de diferentes maneras. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 5 \times 7 = 35 \\ \underline{+\ 1} \\ 36 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 4 \times 6 = 24 \\ \underline{+4} \\ 28 \end{array}$$

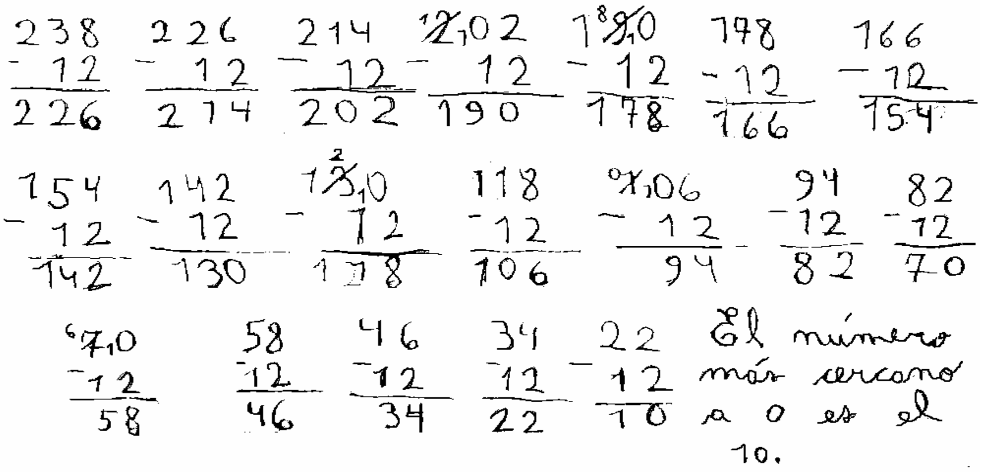
A partir de este trabajo, se inició la construcción del algoritmo de la división.

d) Problemas de iteración

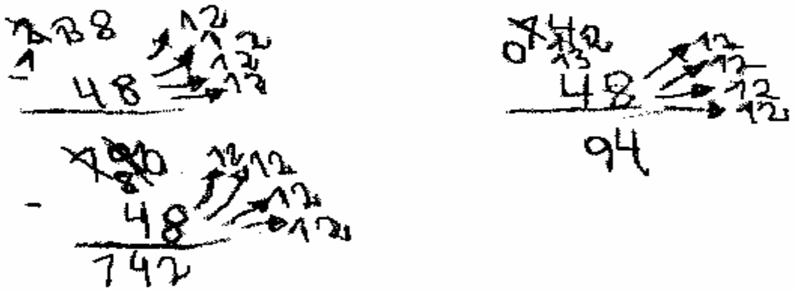
Se trata de aquellos problemas en lo que hay que “encontrar cuántas veces entra un número adentro de otro”, aunque los contextos en los que se presentan no den cuenta “inmediatamente” de esta relación.
El siguiente problema fue planteado en 2º año: *Estoy en el número 238. Doy saltitos para atrás de 12 en 12. ¿A qué número llego más cercano al 0?* [12]

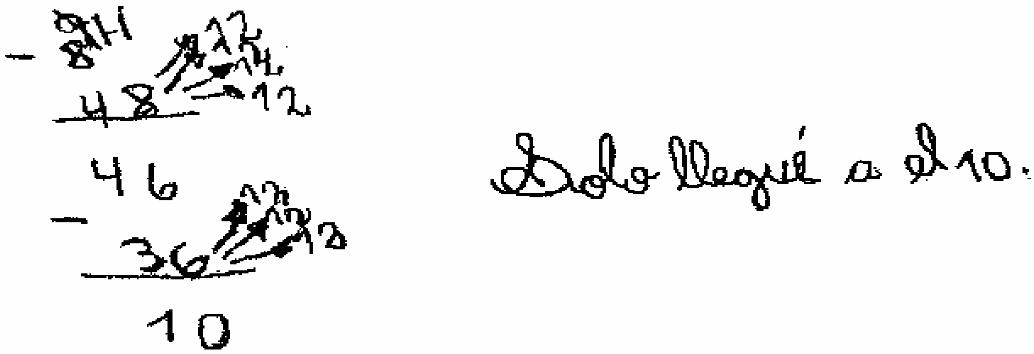
Algunos alumnos realizan restas sucesivas de 12 en 12

[12] Obviamente, en primer ciclo se trabaja sólo con números naturales.



Otros alumnos se dan cuenta de que es más conveniente restar “varios doces juntos” como en este caso:

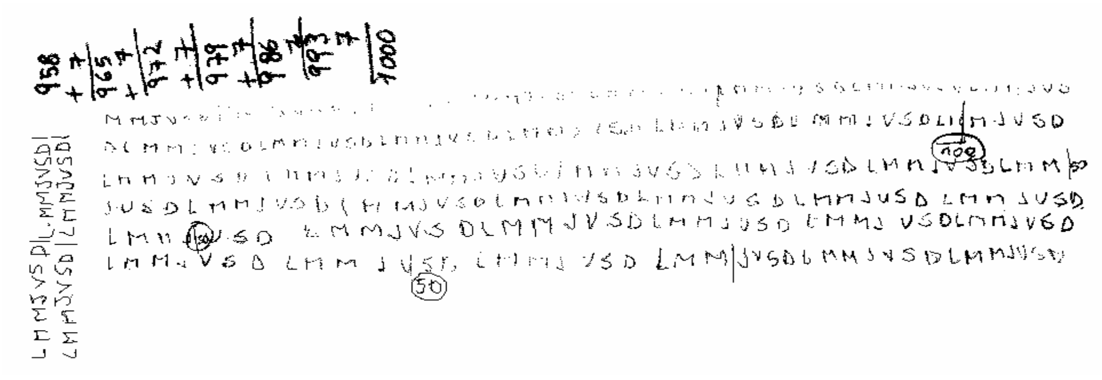




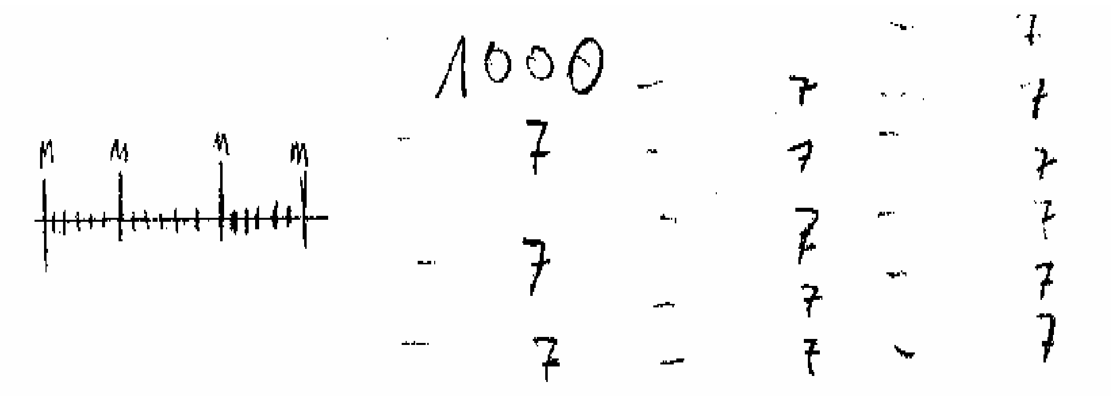
La intención de este trabajo es que los alumnos puedan comparar los diversos modos de resolverlo, y analizar la economía de uno sobre el otro. En tercer o cuarto año, los alumnos podrán reconocer la división como recurso para resolver también este tipo de problemas.

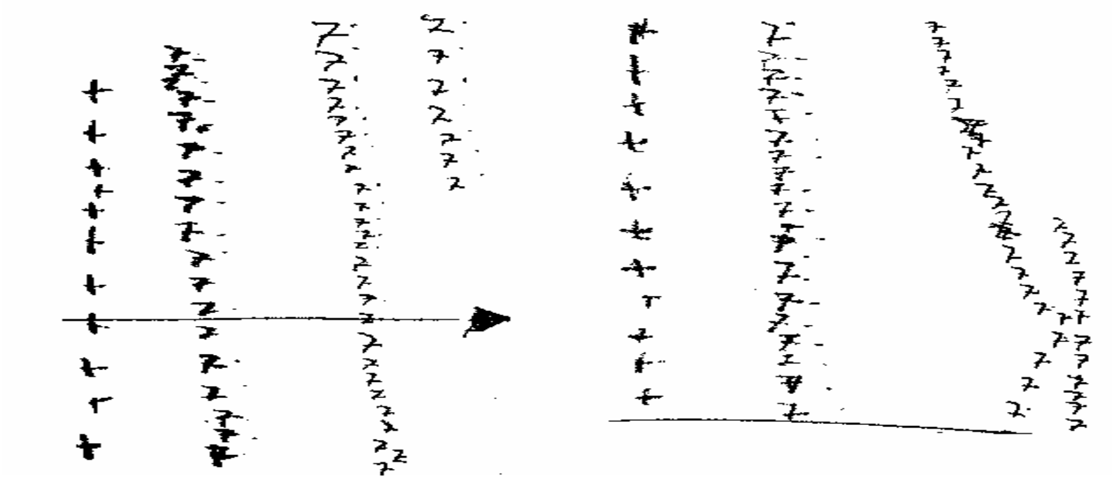
Incluimos ahora (siempre perteneciente al trabajo de Broitman e Itzcovich) un problema planteado en 6º año: *Sabiendo que hoy es martes. ¿Qué día de la semana será dentro de 1000 días?*

Los alumnos, para resolver este problema, se organizan en parejas. Algunos alumnos, como Diana, comienzan la resolución haciendo largas listas con las iniciales de los días de la semana, señalando la cantidad de días transcurridos (por ejemplo 100). Luego abandona este recurso y continúa sumando “sietes” al darse cuenta de esta regularidad. (Transcribimos solo una parte de su larga producción):



Bernardo propone usar una recta numérica como recurso de control y marcar en ella los días martes con un M y una rayita para cada uno de los días siguientes. Luego abandona esta estrategia y decide realizar restas de siete en siete, mientras dice: *Le saco siete, le saco siete,...* Empieza escribiéndolas y posteriormente pregunta si puede usar la calculadora y la usa para sumar sietes.





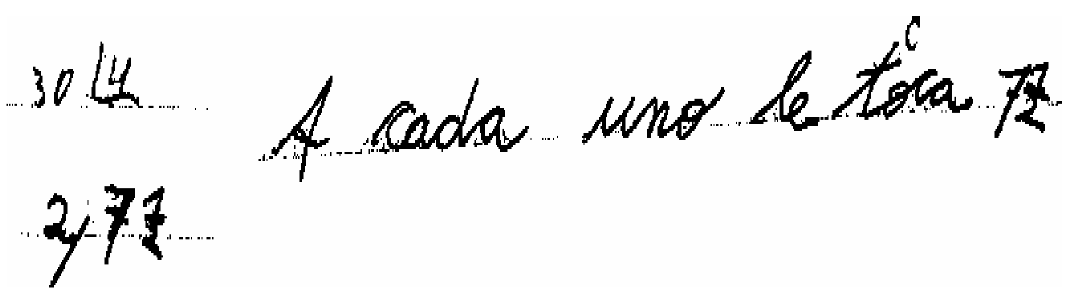
A partir del comentario de Bernardo (*le saco siete, le saco siete,...)* se produce el siguiente diálogo:

Matías: ¡*"Entonces lo podés dividir por siete!*
Maestra: *¿Qué dividís por siete?*
Matías: *Y...mil dividido siete*
Maestra: ¿Por qué?
Matías: Para *no restarlo tantas veces*
(Matías realiza la cuenta obtiene 142 de cociente y 6 de resto)
Matías: *No me doy cuenta. ¿Qué son estos ciento cuarenta y dos y estos seis que sobran?*
Luego de un pequeño diálogo con la maestra, Matías dice: *son ciento cuarenta y dos semanas,* y pregunta *¿Y estos seis que sobran?* La clase entera comienza a analizar el significado de ese 6 hasta que Gaspar dice que se trata de 6 días. Los alumnos cuentan 6: miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo y lunes, siendo este último día la respuesta al problema.

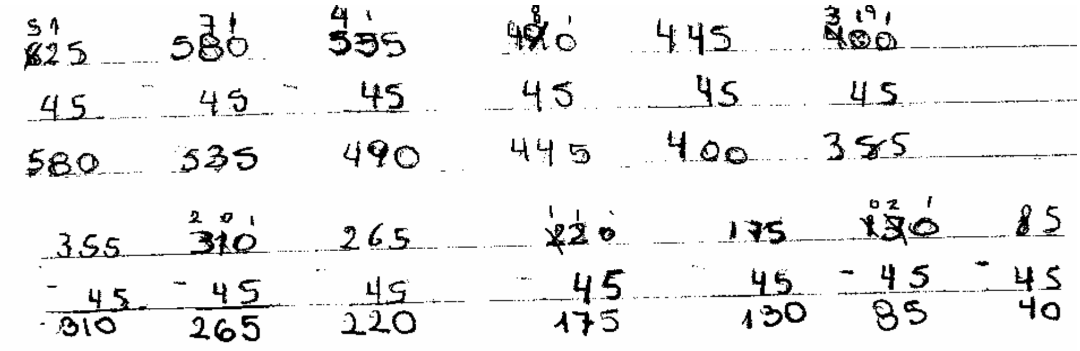
Las docentes retoman la situación y promueven el análisis de los números del algoritmo en relación con el problema. Luego proponen otro problema: *"Qué día de la semana será dentro de 3008 días"* con el objetivo de que ahora todos los alumnos utilicen la división para su resolución.
Estos problemas, además de poder ser considerados como problemas de iteración, tienen la particularidad de que la respuesta a la pregunta planteada, está dada por el análisis del resto, al igual que en otras situaciones.

Problemas de análisis del resto

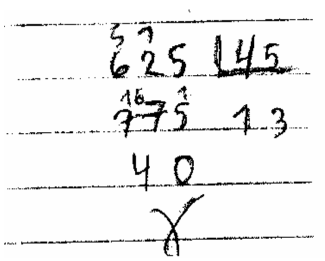
En cuarto año, por ejemplo, se espera que los niños puedan representar de maneras diversas el análisis realizado sobre el resto, como por ejemplo, este alumno que frente al problema "Hay que repartir 30 chocolates entre 4 chicos", escribe a su manera la partición realizada:

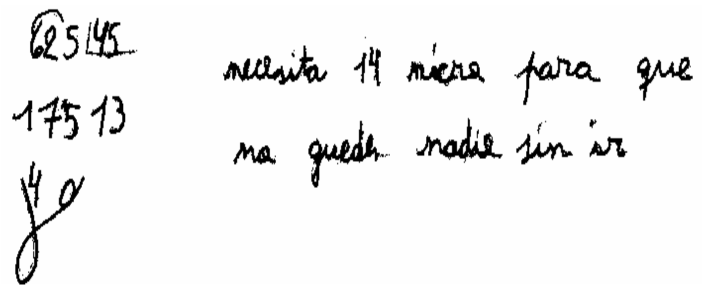


A veces este resto "responde" la pregunta al problema, como en el caso de los 1000 días recién analizado. En otras ocasiones exige considerar "un elemento más". Veamos algunos ejemplos:
6º año: *"Hay 625 pasajeros para ser trasladados a un congreso en micro. En cada micro entran 45 personas. ¿Cuántos micros se necesitan?"*.
Algunos alumnos restaron sucesivamente 45:



Otros alumnos hicieron el algoritmo de la división, obteniendo 13 de cociente y 40 de resto.





Entre los alumnos que usaron restas sucesivas o el algoritmo, algunos dieron como respuesta *13 micros* y otros se dieron cuenta de que era necesario otro micro para los 40 pasajeros que sobraban. A partir del intercambio entre los alumnos y un análisis colectivo de las respuestas obtenidas se pudo arribar a la conclusión de que eran necesarios 14 micros, como registra este alumno: *se necesitan 14 micros para que no quede nadie sin ir.*

Actividad 22 (para analizar en el encuentro presencial)
Los problemas incluidos más abajo se resuelven todos haciendo la misma cuenta. Determine en cada caso.

a) ¿Cuál es la respuesta al problema? ¿En qué incide el valor del resto?
b) ¿Que tipo de relaciones plantea cada uno?
c) En relación a lo anterior, ¿qué tipo de procedimientos puede anticipar en sus alumnos?

Problemas:

1. Hay que trasladar 61 personas en autos. Si en cada auto pueden viajar 6 personas, ¿cuántos autos se necesitan?
2. Tengo 61 chocolates para repartir entre 6 chicos. ¿Cuánto chocolate le toca a cada uno si lo reparto todo y en partes iguales?
3. ¿Cuántos dígitos tendrá el resultado de hacer 61: 6 con la calculadora? ¿Y si se hiciera la cuenta con lápiz y papel?
4. Hay que repartir 61 rosas en 6 ramos iguales, ¿Cuántas rosas habrá en cada ramo?
5. Hay que ubicar 61 rosas de a 6 rosas en cada ramo. ¿Cuántos ramos se podrán formar?
6. Hay que distribuir $61 entre 6 personas. ¿Cuánta plata le darán a cada uno si se reparte todo y en partes iguales?

7. De una varilla de 61m se hicieron 6 pedazos de la misma longitud. ¿Cuánto mide cada pedazo?
8. De una varilla de 61m, ¿cuántos pedazos de 6m se pueden cortar?
9. De los $ 61 que tengo, gasto por día, ¿para cuántos días me alcanza?
10. Si estoy en el casillero nº 61 del Juego de la Oca y bajo dando saltos de a 6 casilleros, ¿a qué número llego en el último salto que puedo dar?

Por lo general, en las prácticas más comunes de enseñanza el resto de la división no se tiene demasiado en cuenta. No se dan problemas en los que la respuesta esté vinculada al valor del resto y no al del cociente; se prefieren problemas cuyo resto es igual a cero, o no se pide la explicitación en la respuesta del problema acerca del valor del resto, etc.

Como se habrá podido concluir, *la división es la única operación cuya respuesta depende del contexto.* Esto abre dos cuestiones didácticas muy importantes. Por un lado, la condición necesaria de enseñar a través de los problemas y al mismo tiempo, como esto no es suficiente. Es decir, sin problemas no hay posibilidad de descubrir este aspecto de la división. Si se prioriza la enseñanza del algoritmo, por más que los alumnos hagan muchas cuentas, los valores hallados son solo números y por lo tanto no hay necesidad de analizar si el resto hay que dejarlo entero, fraccionarlo, modificar el cociente, etc.

La otra cuestión es que si no media la intencionalidad del docente en que sus alumnos descubran este aspecto de la división, no planteará situaciones que los enfrenten a tomar ese tipo de decisiones y validarlas y por lo tanto, no se apropiarán de este conocimiento.

En segundo ciclo, el análisis con los alumnos tendría que centrarse en las diferentes respuestas según sea resto entero o no, haya que bajar decimales y en ese caso cuántos (dos si es dinero, tres si son longitudes); el valor del resto cuando en el cociente haya decimales (el resto 4 en el problema de dinero equivale a centésimos, en el problema de longitudes a milésimos, en el problema de chocolate a 4/6); etc.

División exacta y división entera

En las diferentes situaciones de división, desde el punto de vista del significado del enunciado, en relación con el contexto en el cual se presenta es posible distinguir:

- situaciones en las que no tiene sentido pensar en un resto no nulo.

Por ejemplo, en el problema: *Si se corta una cinta de 32cm en 5 tiras de la misma longitud, ¿cuánto medirá cada tira?*, se propone cortar toda la cinta, por lo cual se está poniendo en juego un sentido de la división vinculado con la definición de división exacta. La división puede ser interpretada en estos casos como la búsqueda del factor desconocido de una multiplicación.

> **Actividad 23** (para analizar en el encuentro presencial)
> a) Analicen si el siguiente problema cumple con esta característica; *¿Por cuál número hay que multiplicar a 5 para obtener 32?*
> b) En problemas como estos ¿a qué otro contenido matemático es necesario apelar para poder resolverlos?
> c) ¿Qué relación entre la división y la multiplicación queda evidenciada?

- situaciones en las que tiene sentido pensar en un resto no nulo.

Por ejemplo, en el problema: *Si se reparten en partes iguales 20 figuritas entre 6 chicos, ¿cuántas figuritas le tocan a cada uno?*

Para estos problemas, no se busca –como en los anteriores- el número que, multiplicado por 6, dé 20; sino entre qué múltiplos consecutivos de 6 se encuadra 20: 3 figuritas para cada uno, sobran; 4 figuritas para cada uno, no alcanzan.

$6 \times 3 < 20 < 6 \times 4$

En este sentido entonces, la división remite a números enteros: se trata de buscar el cociente entero del número **a** dividido por el numero **b** o también de ubicar al número **a** entre dos múltiplos consecutivos del número **b**. Luego, el cociente entero de 20 dividido 6 es 3 y el resto, 2. O sea $6 \times 3 + 2 = 20$

En general, las situaciones de división que se proponen en la escuela, solicitan el cociente por defecto; es decir, el múltiplo de 6 más cercano, menor o igual que 20.

Actividad 24 (para analizar en el encuentro presencial)
a) Elijan un problema que sea ejemplo de división entera y cuyo cociente sea por defecto.
b) Analicen el siguiente problema: *Si pueden viajar hasta 4 pasajeros en cada remise, ¿cuántos remises hay que encargar para que puedan trasladarse 10 personas?*, ¿a qué tipo de cociente se está remitiendo? ¿Qué es necesario tener en cuenta para dar la respuesta?

Estas situaciones, remiten a la definición de división entera como operación que, a todo par de números enteros (**a** y **b**), le hace corresponder otro par de números enteros (**q** y **r**), de manera que **a = b . q + r**, siendo **r** mayor o igual que **0** y menor que **b** (**a:** dividendo, **b:** divisor, **q**: cociente y **r:** resto).

Actividad 25 (para analizar en el encuentro presencial)
Analizar cada uno de estos cálculos y sus posibles resultados. Para cada uno de ellos, elaborar un posible enunciado de problema:

- al dividir 75:5, el resultado obtenido es 15. La respuesta es única.
- al dividir 7:2, los posibles resultados son: cociente entero 3 o 3,5 (7/2).
- al dividir 3:5, los posibles resultados son: 0,6. Sin embargo, otra respuesta valida hubiera sido: cociente, 0; resto, 3. O, también, 3/5.
- al dividir 40:6, los posibles resultados son: 40 no es divisible por 6; el cociente entero es 6 y el resto 4; 6,6; 6,66; 6,6 (periódico); 40/6, etc.
- al dividir 35:16, los posibles resultados son: cociente 2 resto 3; cociente 2,18 resto 12; cociente 2,187 resto 8; etc.

¿Qué conclusiones acerca de la división le permite identificar el análisis anterior?

Actividad 26 (de autocorrección)
1. Establezca las diferencias entre este tipo de trabajo y el que sería posible llevar adelante si la enseñanza se encarara principalmente a través de la enseñanza de la "cuenta" de dividir.
2. Retome y modifique, en caso de considerarlo necesario, su respuesta acerca de nuestra pregunta de partida en la actividad Nº 4: ¿Cuándo es posible afirmar que un alumno maneja el concepto de división?

¿Cómo llegar al algoritmo?

Sin avanzar con la lectura del módulo realice la siguiente actividad:

> **Actividad 27** (de autocorrección)
> Realice un punteo de los conocimientos que considera necesario los alumnos tengan disponibles antes de enseñarles el algoritmo de la división.

Teniendo en cuenta la complejidad del algoritmo de la división, es importante identificar la necesidad de enseñar primero a sus alumnos, los conocimientos de base que se ponen en juego al utilizar la cuenta de dividir convencional. Uno de los aspectos a tener en cuenta, es que dispongan de la posibilidad de anticipar el valor del cociente sin necesidad de recitar toda la tabla. Esto será útil tanto para la cuenta como para cualquier tipo de resolución por cálculo mental. A continuación, incluimos tipos posibles de situaciones que permiten trabajar estas competencias.

1)[13] ¿Cuántas veces hay que sumar…para alcanzar el número….? (o cuántos saltos de a…hay que dar para llegar a....) Anotá lo que pensaste y después verificá con la calculadora.

a) ¿Cuántas veces hay que sumar 6 para acercarse lo más posible a 80 sin pasarlo?
b) ¿Cuántas veces hay que sumar 7 para acercarse lo más posible a 85 sin pasarlo?
c) ¿Cuántas veces hay que sumar 6 para acercarse lo más posible a 100 sin pasarlo?
d) ¿Cuántas veces hay que sumar 5 para acercarse lo más posible a 95 sin pasarlo?
e) ¿Cuántas veces hay que sumar 7 para acercarse lo más posible a 1.500 sin pasarlo?
f) ¿Cuántas veces hay que sumar 100 para acercarse lo más posible a 12458 sin pasarlo?
g) ¿Cuántas veces hay que sumar 32 para acercarse lo más posible a 39.847 sin pasarlo?
h) ¿Cuántas veces hay que sumar 32 para acercarse lo más posible a 15.575 sin pasarlo?
i) ¿Cuántas veces hay que sumar 10 para acercarse lo más posible a 1245 sin pasarlo?

Las reflexiones que se generen deben apuntar a que los alumnos identifiquen las regularidades y que utilicen los resultados conocidos como soporte para resolver los desconocidos.

2. Problemas de distribuciones

a) Completá la tabla:

Cantidad de botellas de gaseosa	Cantidad de packs de 4 que se pueden armar	Sobrantes
38		
52		
69		
78		
100		
124		

b) Se reparten $ 120 entre 6 personas en partes iguales. ¿Cuánto recibe cada uno?

$180 entre 6
$200 entre 10
$400 entre 4
$400 entre 8

[13] Moreno, Quaranta. Ob. cit.

$555 entre 5
$96 entre 8

c) Si se reparten en partes iguales....

$	Entre ... personas	Cada uno recibe	Sobra
44	4		
84	8		
70	20		
142	7		
220	12		

3. Problemas de división entera

Uso del repertorio multiplicativo para resolver problemas de división entera:

a) Para cada una de estas respuestas, decidí si es correcta:

	Cociente	Resto	Correcto o incorrecto	Para los incorrectos, respuesta correcta
a) ¿Cuántas veces entra 5 en 26?	5	1		
b) ¿Cuántas veces entra 5 en 49?	9	4		
c) ¿Cuántas veces entra 7 en 48?	6	0		
d) ¿Cuántas veces entra 6 en 34?	6	2		
e) ¿Cuántas veces entra 10 en 73?	3	7		
f) ¿Cuántas veces entra 10 en 67?	6	7		

b) Encontrá el cociente y el resto en cada uno de estos casos:

	Cociente	Resto
a) ¿Cuántas veces entra 3 en 22?		
b) ¿Cuántas veces entra 8 en 46?		
c) ¿Cuántas veces entra 4 en 39?		
d) ¿Cuántas veces entra 6 en 54?		
e) ¿Cuántas veces entra 10 en 68?		
f) ¿Cuántas veces entra 10 en 93?		
g) ¿Cuántas veces entra 2 en 22?		

c) Sabiendo que 48: 6 = 8, calculá mentalmente el resultado de las siguientes divisiones y después verificá con la calculadora.

48 : 12 = 48 : 3 = 24 : 6 =	24 : 12 = 24 : 3 =

d) Sabiendo que 12 x 8 = 96, calculá mentalmente el resultado de las siguientes divisiones y después verificá con la calculadora.

96 : 8 = 96 : 12 = 96 : 6 = 96 : 4 =	960 : 12 = 96 : 2 =

e) Un número multiplicado por.... da........ ¿Qué número es? Escribilo y después verificá con la calculadora.

Un número multiplicado por...	Da....	¿Qué número es?
10	160	
100	320	
100	1700	
10	340	
1000	6000	
3	60	
20	60	
40	400	
7	140	
2	64	

En los números utilizados, como ejemplo en el problema anterior, existe una diferencia importante. Mientras que en los primeros de ellos sólo se pone en juego la multiplicación y la división por potencias de 10, en el segundo se agregan multiplicaciones por factores que no lo son. En ambos casos una estrategia muy probable es que los niños busquen por qué número hay que multiplicar al que aparece en la columna de la izquierda para obtener el del centro.

En los primeros ejemplos, las cifras que componen el número buscado ya están escritas en el número de la columna del centro (excepto los ceros, por supuesto). Por ejemplo 10 x *16 = 160*.

En cambio, en los otros tipos de números se agrega la necesidad de buscar *en la tabla del 3* (para el caso), un número que multiplicado por este dé por resultado 6, y luego se analiza qué cantidad de ceros corresponde escribir en cada caso.

Las dos actividades siguientes relacionan la multiplicación con la división. Para encontrar el dividendo de las divisiones propuestas, es muy probable que los niños multipliquen el cociente obtenido por el divisor que se ofrece. Nuevamente ocurre, que mientras en los primeros ejemplos aparecen multiplicaciones por potencias de 10, en los siguientes aparecen multiplicaciones por factores que no lo son.

a)

Un número dividido por....	da.....	¿Qué número es?
10	4	
10	76	
100	12	
1000	43	
2	20	
20	200	
5	100	
6	36	
7	28	

b) Sabemos que en algunos momentos, para hacer divisiones es útil descomponer el dividendo de una manera que resulte "cómoda"; es decir, en números que *den justo* al dividirlos por el divisor dado. Por ejemplo, para 183: 3

Para algunos podría ser conveniente pensar al 183 como 150 + 33, dividir cada una de esas partes por 3 y luego sumarlas: 150:3= 50; 33:3 = 11; 50+11=61. También sabemos que no hay una única manera de descomponer el número que resulte conveniente:
Es posible pensar el 183 como 90 + 93 y hacer 90: 3 + 93: 3 = 30 + 31 = 61 ó

183 = 120 + 63
120: 3+ 63:3 = 40 + 21= 61
Etcétera.

A continuación, proponemos una serie de divisiones. Para cada una de ellas, hay que elegir una manera de descomponer el dividendo que facilite los cálculos:

Dividendo	Divisor	Descomposición del dividendo	Divisiones parciales	Cociente	Resto
57	5				
78	7				
84	6				
70	6				
126	6				
224	2				
96	8				
106	25				
148	7				
68	4				

El cálculo aproximado es también un recurso importante para que los alumnos tengan un control de la pertinencia de los resultados. Se les puede ofrecer situaciones como las siguientes.

a) Para las siguientes divisiones, marcá entre qué números estará su cociente:

	Entre 0 y 10	Entre 10 y 100
82 : 2		
132 : 5		
364 : 4		
913 : 12		
240 : 4		
119 : 12		

- Para cada uno de los cocientes de esas divisiones, ¿de cuál de los dos extremos del intervalo que señalaste estará más cerca?

Te explicamos mejor la pregunta: Por ejemplo, para hacer 364: 4, sabemos que el cociente será mayor que 10 porque 10 x 4 = 40. También sabemos que será menor que 100 porque 100 x 4 = 400. Entonces el cociente buscado está entre 10 y 100. (Es decir, tiene dos cifras).

Ahora queremos saber si estará más cerca de 10 o de 100:
Podemos pensar que: si 20 x 4 = 80, entonces es más de 20.

30 x 4 = 120, es poco
40 x 4 = 160, es poco
80 x 4 = 320, es poco

90 x 4 = 360, por lo tanto está más cerca de 100 que de 10.

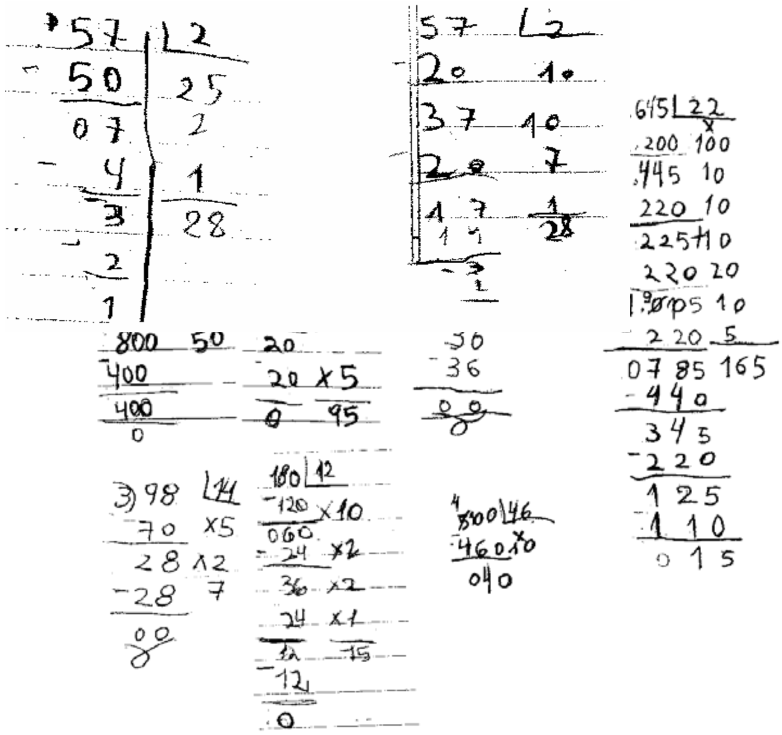
- O también que 50 x 4 = 200, la mitad de 100 x 4. Entonces el cociente es mayor que 50. Por lo tanto, está más cerca de 100 que de 10.
- Etcétera.

Te pedimos ahora que lo pienses para cada una de las divisiones de la tabla que completaste.

> **Actividad 28** (para analizar en el encuentro presencial)
> Teniendo en cuenta que todas las situaciones que ofrecemos son solo ejemplos posibles para la enseñanza, y que deberán ser analizadas por el docente teniendo en cuenta las características de su grupo de alumnos, le pedimos que:
> 1. anticipe qué tipo de problemas les daría y cuál sería la intencionalidad didáctica
> 2. qué tipo de gestión de la clase llevaría adelante para favorecer la producción de conocimientos
> 3. qué tipo de procedimientos cree usted que utilizarían sus alumnos.
>
> Incluimos más abajo las producciones de alumnos en sus primeras aproximaciones al algoritmo de la división:

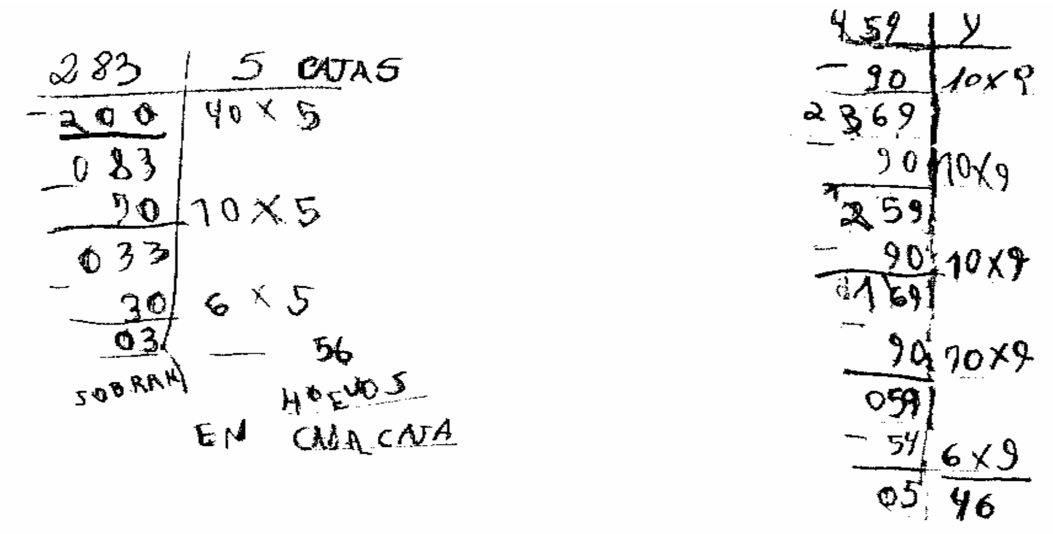
3º año (DGCyE): Se les propone a los alumnos una serie de problemas que tienen la finalidad de *ensayar* algoritmos de división. En clases anteriores, los alumnos habían apelado a diferentes recursos para resolver problemas de división: restas sucesivas, sumas, aproximaciones por multiplicación. A partir de estas producciones de los alumnos, su maestra les presentó una organización de los cálculos que ellos estaban desplegando, arribando a escrituras como las siguientes:

Por ejemplo, Lucas y Pedro hacen cálculos distintos al interior del algoritmo, llegando ambos al resultado correcto.



Otros alumnos, también de tercer año, resuelven de este modo los cálculos aún con cocientes de más cifras:

Otro chico resuelve los cálculos mostrando las multiplicaciones parciales que va realizando de la siguiente manera:



> **Actividad 29** (para analizar en el encuentro presencial)
> Analicen los siguientes algoritmos de división. Establezca sus similitudes y diferencias y explicite:
> - ¿cómo le explica a sus alumnos en el ejemplo 1 que tienen que tomar 2 cifras?
> - ¿cómo le explica a sus alumnos en el mismo ejemplo dónde ubicar los números del producto para establecer el resto?

1.

```
247896 |_5______
 47       49579
   28
    39
     46
      1
```

2.

```
  247896 |_5_____
- 200000   40000
   47896    9000
  -45000
    2896     500
   -2500
     396      70
    -350
      46       9
     -45  ______
      1/   49579
```

Nos interesa reflexionar junto a usted, acerca de ciertas contradicciones en las que incurrimos y los forzamientos del conocimiento que provocamos, al tratar de explicar el funcionamiento del algoritmo tradicional.

En general, se explica que se deben tomar la cantidad de cifras del dividendo en función de *si el divisor entra o no*. En este caso, y desde esta concepción, hay que tomar el *24 porque el 2 no se puede dividir en 5*. Al hacer esta afirmación, estamos diciendo al mismo tiempo que 200.000 no puede dividirse en 5... Por otra parte, luego de encontrar el resultado del producto, en el primer caso 20 se ubica debajo del 24 y, ya sea que se haga el cálculo por diferencia o se escriba la resta, se está operando una resta encolumnando de izquierda a derecha.

Esto provoca en los alumnos comentarios del tipo *hay dos restas, la común y la de la división.* Y hay que reconocer cierta razón en esto. En principio hay que reconocerles la contradicción que provocamos con la regla del encolumnado de derecha a izquierda para la suma y la resta con la que vienen interactuando desde 2º año.

El hecho de no tener idea acerca de la cantidad de cifras que va a tener el cociente, hace que el resultado se vaya construyendo poco a poco; con lo cual al decidir que *el 5 entra 4 veces en el 24,* no hay idea ninguna de que en realidad es 40.000 el valor del cociente, 200.000 el valor de ese primer producto y que, por lo tanto, se tiene que restar a 247.896.

Algunos maestros podrán objetar que resultaría muy complicado para los alumnos hacer la cuenta igual a la del segundo ejemplo. Uno de los supuestos es que la búsqueda del valor del cociente sería muy difícil al tomar todos los números. En realidad, si los chicos tuvieron la oportunidad por una parte de trabajar multiplicaciones por unidad seguida de ceros, y por otra parte, de vincular este conocimiento con lo que saben del sistema de numeración, las dificultades disminuirían considerablemente. Habrá que plantear un trabajo que se ocupe particularmente en generar reflexiones de este tipo[14]:

- ¿cómo hacer para saber cuántas cifras va a tener el cociente antes de hacer la cuenta? Si se multiplica el divisor por unidad seguida de ceros, rápidamente se podrá saber que 5 x 10=50 es poco; 5x100=500 es poco; 5x1.000=5.000 es poco; 5x10.000=50.000 es poco; 5x100.000=500.000 me pasé. No hay duda que el resultado tiene 5 cifras.

- si se multiplica 40.000x5, ¿es posible que el resultado tenga valores distintos de 0 para las unidades de mil, centenas, decenas y unidades? ¿Y en cualquier caso en el que se multiplique una cifra seguida de ceros por una cifra? ¿Y por dos cifras? Comprender esta relación permite operar con cifras enteras colocando tantos ceros como corresponda al intervalo con el que se está operando.

- si ya se sabe hacer una cuenta de división en la que el dividendo tiene 2 cifras y el divisor una cifra, ¿qué nuevo conocimiento hay que aprender para poder hacer una cuenta de división en la que el dividendo tenga 3 cifras? ¿y 4 cifras? ¿y n cifras? Elegimos un ejemplo con más cifras de las que habitualmente se proponen en 1º ciclo, para demostrar que una vez aprendido el funcionamiento del algoritmo, se puede generalizar sin que para ello sea necesario más que establecer esa regularidad.
- ¿en qué difiere el algoritmo de la división por una cifra del algoritmo por 2 o más cifras? ¿Qué nuevo conocimiento es necesario que dominen los alumnos? Si se toma el número del divisor sin descomponerlo, el funcionamiento de la cuenta es el mismo, y lo único a trabajar con los alumnos son los recursos para encontrar el valor del cociente. Un modo posible entre otros es, por ejemplo, si fuera 237652: 25, encuadrar el resultado del siguiente modo: 25 x 10000= 250000 me pasé. El resultado tiene 4 cifras:

25 x 2000= 50 000
25 x 3000= 75 000
25 x 4000= 100 000
25 x 5000= 125 000
25 x 6000= 150 000
25 x 7000= 175 000
25 x 8000= 200 000
25 x 9000= 225 000

Para realizar estos cálculos, no estamos pensando en que los alumnos hagan cuentas de multiplicar como único recurso, sino en que reutilicen lo aprendido desde 2º año a propósito del trabajo con las tablas de proporcionalidad, sobre las propiedades de la multiplicación. Un debate interesante a llevar adelante con ellos, es el que se generará si se les solicita que

[14] No estamos sugiriendo que los alumnos de 3º realicen esta cuenta. Los números elegidos para el ejemplo fueron pensados para que el análisis resultara interesante para el docente.

busquen diferentes maneras de encontrar los nuevos productos a medida que avanzan en la tabla.

Sin avanzar con la lectura del módulo realice la siguiente actividad:

Actividad 30 (de autocorrección)
Realicen la cuenta 237.652: 25 utilizando la información de los productos que aparecen en la tabla de más arriba para encontrar los resultados.

Como se puede ver, por ejemplo, para hacer 237652: 25, sabemos al observar la tabla que el valor del cociente es 9.000 y que el producto es 225.000. El resto obtenido es 12.652; buscamos en la tabla y sabemos que el cociente es 500 porque estamos buscando el valor del cociente correspondiente a las centenas, y que el producto en consecuencia es 12500, y así siguiendo.
No estamos *prescribiendo* este tipo de algoritmo. Solo queremos reflexionar sobre la posibilidad de aceptar otros modos posibles (entre ellos los que ofrecemos) de resolver un cálculo de división.

Actividad 31 (ítem correspondiente a la evaluación de proceso)
1. Lea los apartados correspondientes al Diseño Curricular para la Educación Primaria *Las Operaciones con Números Naturales en el Primer Ciclo* y *Las Operaciones con Números Naturales en el Segundo Ciclo,* y relacione dicho desarrollo con lo abordado hasta aquí.
2. Identifique los conceptos que considere más importantes retener para aportar, discutir, etc. en el encuentro presencial.

Unidad 3
Secuenciación de contenidos. Avances sobre el campo multiplicativo

Secuenciación de contenidos referidos a la división

Como vimos en aquellas situaciones que se pueden resolver con multiplicaciones y divisiones, *existen clases de problemas* que, para los alumnos, revisten niveles variados de complejidad. El estudio de estas *clases de problemas* abona a la construcción del sentido de cada una de las operaciones.

> **Actividad 32** (para analizar en el encuentro presencial)
> Elabore una secuencia de enseñanza de la división para sus alumnos, utilizando para ello las grillas de contenidos del Diseño Curricular y lo trabajado hasta aquí en el curso.

Extensión de las relaciones multiplicativas a problemas de división

Los siguientes problemas se refieren a la relación $D = d \times q + r$, con la condición de que $0 < r < d$.

Ejemplo 1:

Proponer una cuenta de dividir en la que el divisor sea 45 y el resto 12. ¿Hay una sola? ¿Cuántas hay? ¿Por qué?

Cociente	Dividendo
1	57
2	102
3	147
4	192
5	237

El trabajo puede continuarse con distintas preguntas como por ejemplo:

a) ¿será cierto que todos los dividendos que se pueden obtener terminarán con 7 o con 2? ¿Por qué?
b) ¿pueden encontrar un cociente y un dividendo de manera que este último sea mayor que 1000? ¿cuál es el dividendo más grande que pueden encontrar?

Ejemplo 2:

Proponer una cuenta de dividir en la cual el divisor sea 5 y el cociente sea 12. ¿Hay una sola cuenta? ¿Cuántas hay?

Ejemplo 3:

Buscar cuentas de dividir en las cuales el cociente sea 12 y el resto sea 6. ¿Cuántas hay?

En este caso, los alumnos pueden reconocer la posibilidad de proponer varias cuentas de dividir que cumplan con la condición que plantea el problema. Es posible que, apoyados en la relación D = c x d + r, identifiquen que al multiplicar 12 por cualquier número (divisor) y, a este resultado sumarle 6, se obtiene el dividendo. De esta manera aparecerán diferentes cuentas:

$$\begin{array}{r|l} 102 & \underline{8\ \ } \\ 6 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & \underline{10\ \ } \\ 6 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 114 & \underline{9\ \ } \\ 6 & 12 \end{array}$$

Es muy probable que aparezcan otras que se producen desde la misma relación, pero que no verifican la condición que plantea el problema; por ejemplo, al hacer la cuenta 12 x 4 + 6 se obtiene 54, pero al hacer 54: 4 se obtiene como cociente 13 y resto 2.

Si este tipo de errores no apareciera, es el docente el que podrá proponer este u otros ejemplos en los cuales se recurre a la relación D = c x d + r, pero el resultado obtenido no cumple con las condiciones del problema. El análisis de estos casos deberá permitir reconocer que, los ejemplos donde la cuenta es correcta, el resto es menor que el divisor y en donde resultó incorrecto, el resto era mayor que el divisor.

Ejemplo 4:

¿Es posible que en una cuenta de dividir, el dividendo sea 32, el cociente 12 y el resto 1? ¿Por qué?

El trabajo con la calculadora: análisis de las propiedades puestas en juego en cálculos de productos

En los últimos años se han comenzado a instalar acuerdos respecto de la incorporación de la calculadora a la clase de matemática. Pero aún persisten comentarios acerca de que *con la calculadora se aprende menos*.
Con la finalidad de poder discutir en el encuentro presencial algunos problemas de multiplicación y división pensados para que los alumnos *aprendan más*, proponemos la siguiente actividad.

> **Actividad 33** (para analizar en el encuentro presencial)
> Le solicitamos que analice en los siguientes problemas:
> - el trabajo matemático que permiten desplegar
> - la potencia del uso de la calculadora en cada uno de ellos
> - las condiciones didácticas y de gestión de la clase que habría que instalar para que produzcan conocimiento.

1. A la biblioteca llegaron 279 libros de matemática para repartir en partes iguales entre 62 alumnos. Queremos saber cuántos libros sobran. ¿Cómo se puede resolver usando la calculadora?
2. En una calculadora se tecleó 54 x 100, pero se cometió un error porque lo que se quería hacer era multiplicar por 50. ¿Cómo podemos corregirlo sin borrar lo que está escrito?
3.
a. Realizar la multiplicación 21 x 55 sin usar la tecla del 5.
b. Realizar la división 3422: 8 sin usar la tecla del 8

En el primer problema, si hacemos la división con la calculadora obtenemos como resultado de la división 4,5. Este resultado no nos permite contestar directamente a la pregunta; tenemos que encontrar el resto. Para ello es necesario despreciar la parte decimal, considerar el cociente entero (4) y multiplicarlo por el dividendo (62). Luego podemos razonar del siguiente modo: si teníamos 279 libros y repartimos 248 (4 x 62), quedaron sin repartir 31 libros, que es la diferencia entre 279-248. En este caso el problema permite ampliar los sentidos de la relación entre el cociente, el divisor, el resto y el dividendo (D = d × c + r).

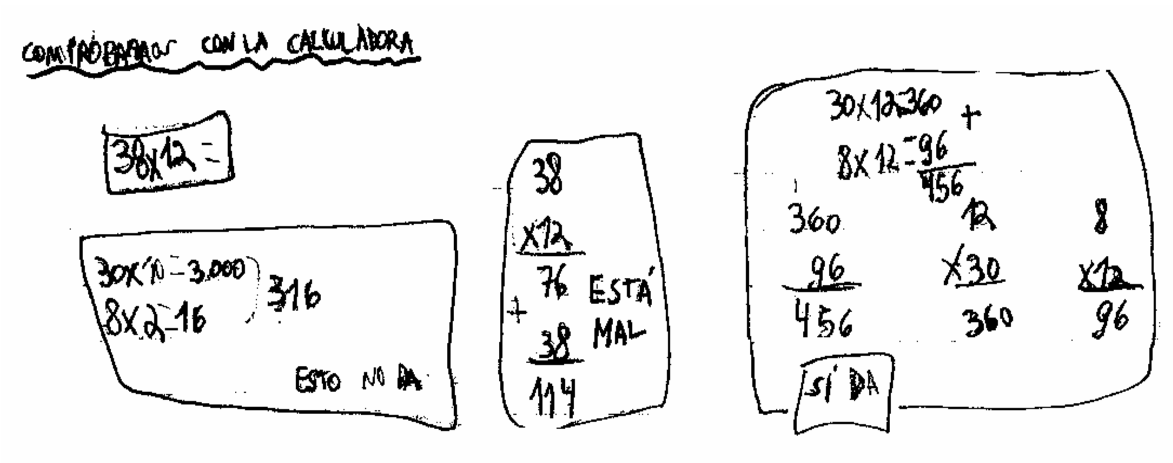
El problema 2 favorece que los alumnos pongan en juego la propiedad asociativa de la multiplicación, si consideran que multiplicar por 100 es equivalente a multiplicar por 50 y por 2. También pueden plantear que multiplicar por 50 es equivalente a multiplicar por 500 y dividir por 100.

A partir de la descomposición de 55, por ejemplo en 49 + 6, el problema 3. a promueve la utilización de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

21 x 55 = 21 x 49 + 21 x 6.

El problema 3. b. permitirá analizar que dividir por 8, es equivalente a dividir por 4 y luego nuevamente por 2; es decir, la pertinencia de utilizar la propiedad asociativa de la división.

Hay un conjunto de problemas de cálculo para resolver con la calculadora que exigen utilizar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. Por ejemplo, este trabajo de un alumno de tercer grado en el que se comprueba la validez o no de ciertas descomposiciones para multiplicar dos números: (DGCyE 2001)



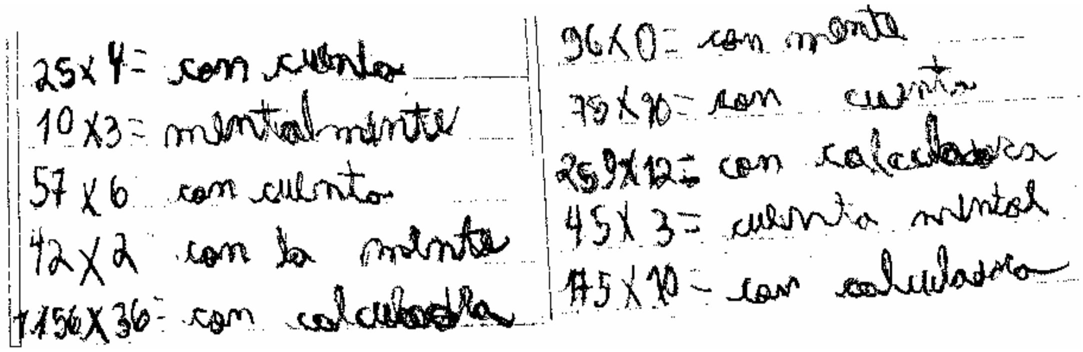
Otros problemas con la calculadora que permiten trabajar las propiedades son por ejemplo los siguientes: *¿Cómo hacer 25 x 20 en la calculadora si no funciona la tecla del 0?* O bien: *¿Cómo hacer 6 x 5 x 7 x 9 x 10 utilizando una sola vez la tecla x?*, etc.

Del mismo modo, hoy es habitual considerar la calculadora como una herramienta necesaria de ser utilizada diariamente en la escuela desde primer año, para resolver problemas cuyo objetivo no es el cálculo. Este aspecto del trabajo, generó un gran debate en los encuentros acerca de los temores de que su uso provocara una disminución del dominio de estrategias de cálculo por parte de los alumnos. Hemos planteado allí la importancia de que los alumnos aprendan hoy día, muchas estrategias de cálculo; más que las que hemos aprendido nosotros. El conocimiento acerca de cómo se inventaron y por qué se difundieron los algoritmos a lo largo de los años (Saiz, 1994), como también la revisión de su importancia actual, forman parte de los desafíos actuales de la escuela para la transformación y actualización de los objetos que en ella se enseñan.

Consideramos que el uso de la calculadora para resolver problemas permite a los alumnos y al docente (bajo ciertas condiciones y decisiones didácticas), *poner el énfasis* de algunas clases en las operaciones, datos, pasos y respuestas de los problemas, en lugar de concentrar la atención en el cálculo algorítmico. Se propone también su uso diario desde los primeros años en el aula, como instrumento de control de otros cálculos realizados y como medio para analizar propiedades de las operaciones. Ya en segundo ciclo incluso como objeto de estudio en sí misma analizando sus propiedades y límites.

Es incluso parte del dominio de la división, la posibilidad de tomar decisiones acerca de cuál es el recurso de cálculo más conveniente en cada problema. ¿Qué aspectos determinan la conveniencia de uno u otro recurso? El tamaño de los números, la *redondez* de los mismos, la cantidad de datos a considerar, la posibilidad de apoyarse en cálculos conocidos y memorizados, el contexto de la situación, etc.

Por ejemplo, un alumno de la escuela 1 Bartolomé Mitre, a partir del trabajo propuesto por su maestra Mónica Capurro, debe analizar y tomar decisiones acerca de la conveniencia de uno u otro recurso de cálculo. Destacamos que en esta actividad no es necesario realizar el cálculo. Sólo debe analizarlo.



La gestión de la clase y su incidencia en la construcción de conocimientos matemáticos

Hasta aquí hemos analizado en mayor profundidad, cuestiones vinculadas al campo de los problemas vinculados a la multiplicación y la división en naturales, y aspectos más ligados al funcionamiento interno, intramatemático, de ambas operaciones.

Reviste la misma importancia reflexionar acerca de las condiciones que habrá que instalar en las aulas para que los aprendizajes se vean favorecidos.

El trabajo matemático que sustentamos no puede desarrollarse de un día para el otro. Se necesita de la intencionalidad del docente para instalar ciertas prácticas en la clase.

Por ejemplo, si un docente no pide a sus alumnos que expliquen cada resolución, este trabajo no va a surgir espontáneamente. Al mismo tiempo, es cierto que tampoco alcanza con pedirlo un día, porque explicar requiere de un aprendizaje y de un docente que se ocupe de trabajarlo con sus alumnos. No nos referimos a alumnos *mostrando* lo que hicieron, sino a alumnos demostrando, dando razones y argumentos matemáticos de lo que hicieron.

¿Cómo se enseña a justificar, a explicar? No es un concepto matemático que pueda definirse ni enseñarse directamente. Sería imposible hacer un *listado* de cuestiones que aseguren una *buena explicación*.

Hay que enseñarlo pero no se puede explicar. Esto nos enfrenta a un desafío didáctico. Lo mismo sucede con cualquier otro concepto que tenga que ver con la forma en que se hace matemática. Son conceptos *metamatemáticos* que se aprenden pero no se enseñan explícitamente.

Una actividad posible entre otras, es que luego de la resolución de un problema en grupos, se pida a los alumnos que escriban las resoluciones (solo si son diferentes) junto a la explicación en el pizarrón y, entre todos, se discuta sobre ellas. Se puede analizar cada explicación teniendo en cuenta si son correctas, completas y claras. También se puede debatir sobre cómo corregir las que no son correctas y llegar a una explicación común.

Esto tendría sentido en la medida de que el docente hubiera mantenido una actitud de aparente neutralidad mientras los alumnos resolvían el problema[15]. Si el maestro hubiera realizado correcciones parciales a cada alumno que se le acercó con la carpeta preguntando *¿Seño, está bien?,* ¿cuál sería el sentido de esa discusión?

La primera consecuencia de esas intervenciones, es que se homogenizan las respuestas perdiendo sentido la confrontación. La más riesgosa didácticamente, es que se encubren los errores dado que difícilmente lleguen a la instancia de debate y discusión. La resolución en matemática se transforma así en algo contingente, los alumnos dicen cosas como *me salió mal, la maestra me dijo que corrigiera,* o, *Ah, ¿no era así?; ¿era de dividir? (Mientras borra la multiplicación).*

Una cuestión interesante es que producir una explicación supone trabajar con otros y, por lo tanto, se refiere a una forma particular de concebir el trabajo matemático. Si en una clase no hay interacción entre los alumnos ni entre el docente y los alumnos a propósito de los problemas, las explicaciones no son necesarias.

Esto no significa que la única organización de la clase posible sea el trabajo en pequeños grupos. El trabajo en colaboración tiene sentido en la medida que la complejidad del problema lo amerite. Estamos pensando en variadas organizaciones de la clase, pero en particular en lo que hace a la conservación del sentido didáctico de cada una de ellas.

Si los alumnos en función del problema planteado pudieran encontrar recursos de resolución de manera autónoma, entonces el trabajo será individual y luego se hará la puesta en común. Si el tipo de problema por su complejidad genera conjeturas, ensayos, entonces aparece como más productivo el trabajo en grupos con la consigna de arribar a una única solución. Si de lo que se trata es de arribar a conclusiones o demostraciones acerca de algún conocimiento en particular, la interacción entre dos o tres alumnos suele ser más fértil. Si hay alumnos flojos o detenidos que no producen, se les puede ofrecer que trabajen de a dos o de a tres mientras el resto de la clase lo hace de manera individual. Etcétera.

En ese sentido es que sugerimos que se prioricen las condiciones que favorecen las interacciones entre los alumnos y el docente, los alumnos entre si a propósito de los problemas.

- Desde el punto de vista de las situaciones, hay momentos más fecundos que otros para generar interacciones, en particular los momentos de *ruptura en el conocimiento matemático* son los más productivos. Estas rupturas se producen cuando:

  -se plantean problemas que exigen reinvertir un mismo conocimiento en contextos desconocidos: problemas de iteraciones por ejemplo, ya que generan diferentes procedimientos y permiten por lo tanto mayor riqueza en las comparaciones, reflexiones, validaciones, etc.;

  -cuando aparecen restricciones en algunos procedimientos hasta ese momento funcionales como por ejemplo: problemas de división que no permiten resoluciones aditivas;

[15]Quaranta, M. y Wolman, S. *Qué, para qué y cómo se discute*. En Panizza, M. y otros, Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Buenos Aires, Paidós, 2004

-cuando se introduce el algoritmo;

-cuando hay que decidir qué hacer con el resto de la división;

-cuando se resuelven problemas que tienen varias soluciones: *Juan y Pedro tienen entre los dos 20 cuadros, ¿cuántos cuadros tiene cada uno?* (Si Juan tiene 1, entonces Pedro tiene 19, si Juan tiene 2 Pedro tiene 18, si Juan tiene 3, Pedro tiene 17, (...) si Juan tiene 19 entonces Pedro tiene 1, por lo tanto 19 respuestas posibles) Chequear que quedaron agotadas todas las posibilidades requiere de un intercambio social. La validación requiere del otro.

- Desde el punto de vista de los alumnos, es necesario que la *resolución sea autónoma*. Por un lado, ya hemos dicho que la toma de decisión forma parte del quehacer matemático. Por otro lado, ¿sobre qué se discutiría y cuáles serían las decisiones a tomar, si en la consigna, en aclaraciones del docente o a través de correcciones mientras los alumnos resuelven se hiciera explícito el procedimiento que se espera?

- Desde el punto de vista del maestro, es necesario que sostenga una postura de *neutralidad aparente*[16]. Tiene que abrirse un espacio de incertidumbre que obligue a los alumnos a buscar por si mismos criterios para demostrar la validez de lo producido. Si la validación y control de las resoluciones de los alumnos pasan por el docente, entonces ellos no necesitan hacerse responsables de buscar razones que avalen su trabajo.

- Desde el punto de vista del contenido de las interacciones, apuntamos a privilegiar la *explicitación y análisis del sentido* de los errores tanto como de las acciones exitosas.

Pensamos que para favorecer un trabajo matemático como el que apuntamos, es importante que en la clase se contemplen diferentes instancias:

- de presentación de las situaciones para su resolución individual y/o en pequeños grupos.

- de resolución efectiva por parte de los alumnos, en las que las intervenciones del docente se centren en aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo, sugiriendo *lo que se debe hacer*, evitando las correcciones parciales mientras los alumnos resuelven dado que pueden ocasionar que las concepciones erradas no aparezcan para ser discutidas, explicitadas. Esto permitirá que desplieguen conjeturas acerca de cuál es el mejor camino, que puedan tomar decisiones respecto a las estrategias y a las representaciones a través de las cuales llevarán adelante dichas estrategias. Apoyarse en la representación frecuentemente facilita comenzar a entender e imaginar una posible solución y habilita a un proceso exploratorio, de ensayo y error, que muchas veces obliga a modificar la representación elaborada.

- de aliento a los alumnos que están detenidos y no producen, tratando de implementar estrategias que permitan superar esas dificultades: Reconociendo que un alumno que no produce es un alumno que no aprende. Alentando a los que *no entienden* a reconocer lo que si entienden para que desde allí, vuelvan a intentarlo. Flexibilizando la organización de la clase, por ejemplo de a dos a discutir la consiga (dos cabezas piensan más que una) aunque el resto trabaje de manera individual. Ayudándolo a establecer y recuperar las relaciones y producciones que en resoluciones anteriores ha podido hacer, y que son posibles de ser vinculadas con el problema actual. Estableciendo claramente que resolver problemas es una tarea compleja que requiere, como mínimo, de leer varias veces la consigna. Leyendo la consigna a aquellos que no pueden. Sin responder rápidamente frente a la demanda del *no entiendo*. En caso contrario, ¿dónde quedan las intenciones de formar alumnos autónomos?

[16] Ibidem.

- de confrontación de resultados, de procedimientos, de representaciones y de argumentos empleados, en las que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado.

- de argumentaciones por parte de los alumnos en las que intenten establecer la validez de lo producido; decidir la certeza o no de los resultados encontrados, dar cuenta de los errores o aciertos cometidos al elaborar un procedimiento. Es decir, se trata de generar condiciones que permitan delegar en los alumnos la responsabilidad de esta tarea.

- de decidir, frente a un recurso, un procedimiento, un resultado, la pertinencia o no de ser utilizado en otras situaciones y en otros dominios. Es decir, analizar el alcance de lo producido: cuándo vale y cuándo deja de valer: solo para un caso, en todos los casos... Esta tarea aproxima a los alumnos a la idea de que algunos procedimientos, algunos resultados, podrían funcionar *siempre*, en cambio otros, tal vez, solo en algunas oportunidades, o para ciertos números, o para ciertas figuras... Es decir, contemplar la idea de que los conocimientos *más potentes* son generalizables.

- de instancias en las que el docente realiza una síntesis de los conocimientos a los que llegó el grupo, y establece las relaciones entre el conocimiento que circuló en la clase y aquel que pretendía enseñar, pone nombres a las propiedades, en caso de que sean nuevas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con otros ya estudiados, o con nuevos a trabajar, ordena, sistematiza lo producido hasta el momento, es decir comienza a *institucionalizar*[17] los nuevos conocimientos.

- finalmente, debemos considerar que es necesario otorgar un espacio para que los alumnos estabilicen y se familiaricen con los conceptos que ya aprendieron, con los que ya tuvieron una primera interacción, enfrentados a la resolución de otros problemas que conlleven a una reutilización de conceptos y técnicas ya aprendidas.

Actividad 34 (para analizar en el encuentro presencial)
Lea el registro de clase que incluimos y a continuación:
- establezca relaciones con lo trabajado hasta ahora
- identifique las diferentes instancias mencionadas más arriba
- identifique cómo pensó cada grupo la resolución del problema
- establezca similitudes y diferencias entre las diferentes resoluciones: conocimientos, representaciones, etc.

Registro de una clase sobre división

La actividad tuvo una duración de una hora y media. Los alumnos estaban organizados en pequeños grupos.

La maestra propone a los niños la situación siguiente: *Un editor debe enviar 8.295 libros. ¿Cómo hará?*

A: Depende de que los mande a la misma persona o a varias diferentes.
A: Igual tendrá que hacer muchos paquetes.
A. Habría que hacer demasiados paquetes.

[17] La *institucionalización* es el momento de la clase en el que el docente establece las relaciones que existen entre las producciones de los alumnos y el saber al que se apunta con la actividad.
Es importante notar que se trata de un *proceso* que va más allá del reconocimiento *cultural* del saber en juego, y a partir del cual los conceptos identificados pueden ser reutilizados por los alumnos en la resolución de nuevos problemas.

Maestra: ¿Cuántos paquetes les parece que serían?
A: Depende de la cantidad de libros que se pongan en cada uno.

M: ¿Podemos decidir cuántos? ¿Cuántos pondrían ustedes?
(Después de una breve discusión los alumnos se ponen de acuerdo que podrían ser 25 libros por paquete)

M: Ahora ustedes tienen todos los elementos para calcular cuántos paquetes mandará. Pónganse a trabajar.
(Después de cinco minutos, todos los grupos parecen encontrarse con una dificultad que no logran resolver: han planteado la división pero no logran resolverla)
A1: Seño, mire (muestra la cuenta 8295: 25. ¿Cómo hacemos? No sabemos hacer esta cuenta.
A1: ¿Cuántas veces entra 25 en 8295?

M: (Después de constatar que todos están en la misma situación): Bueno, si tenemos ese problema....traten de hacer el cálculo utilizando las operaciones que conocen. Traten de resolverlo de alguna manera.
(Los grupos trabajan durante 25 minutos. Luego comienza la puesta en común)

Grupo 1: Tratamos de llegar a 8295 multiplicando por un número cada vez más grande. Hicimos así:

25 x 19 = 325
25 x 25 = 625
25 x 30 = 750
25 x 40 = 1000
25 x 80 = 2000
25 x 100 = 2500
25 x 280 = 7000
25 x 385 = 9625

El número de paquetes está comprendido entonces entre 280 y 385.

25 x 295 = 7375
25 x 320 = 8000
No tuvimos tiempo de terminar

Grupo 2 y 3:
Vimos que si hacíamos 100 paquetes, empaquetábamos 2500 libros: 25 x 100 = 2500. Y buscamos lo que quedaba.... y así sucesivamente.

8295
- 2500 100 paquetes
5795
- 2500 100 paquetes
3295
- 2500 100 paquetes
795
- 250 10 paquetes
545
- 250 10 paquetes
295
- 250 10 paquetes
45
- 25 1 paquete
20 331 paquetes
21

Grupo 4:

Pensamos que si calculábamos cuánto había en un paquete, después en dos paquetes, después en tres paquetes y así.... al final íbamos a encontrar cuántos paquetes había que hacer para 8295 libros:

25	1
50	2
75	3

.... (Los chicos calcularon todos los resultados intermedios)

Cuando llegamos ahí, nos dimos cuenta de que en 825 teníamos las dos primeras cifras de 8295, entonces multiplicamos por 10:

8250	330
8275	331 y quedan 20 libros.

Grupo 5:

Tratamos de ver cuántas veces era 25 de 8295:
4 x 25 = 100
8 x 25 = 200
80 x 25 = 2000 Es demasiado chiquito.....
160 x 25 = 4000 Es demasiado grande....
160 x 25 = 4000
320 X 25 = 8000
8 x 25 = 200 331 cajas
3 x 25 = 75
Y quedan 20.

Grupo 6:

Pensamos que cada vez que hacíamos un paquete había que mandar 25 libros menos. Entonces hicimos todas estas restas:

8295
- 25 1 paquete
8270
- 25 1 paquete
8245
- 25 1 paquete
Como se hacía muy largo, entonces se nos ocurrió sacar diez paquetes a la vez:
8220
- 250 10 paquetes
7970
- 250 10 paquetes
7720
Como igual el número seguía bajando muy despacio, entonces empezamos a sacar 2500, los libros de 100 paquetes:
7720
- 2500 100 paquetes
5220
- 2500 100paquetes
2720
- 2500 100 paquetes
220
- 100 4 paquetes
120
- 100 4 paquetes
20
Quedan 20 libros. Hicimos en total 331 paquetes.

Grupo 7:

Fuimos probando. Primero calculamos cuántos libros había en mil paquetes:
1000 x 25 = 25000 demasiado grande...
100 x 25 = 2500 demasiado chico....
El número de paquetes está entre 100 y 1000
500 x 25 = 12500 demasiado grande...
200 x 25 = 500 muy chico...
400 x 25 = 10000 muy grande... está entre 200 y 400
300 x 25 = 7500 todavía es chico
350 x 25 = 8750 es grande...
340 x 25 = 7750 es chico...
320 x 25 = 8000 muy chico....
330 x 25 = 8250 está entre 330 y 340
331 x 25 = 8275
+ 20
8295

Grupo 8:

Vimos que 95 era 75 + 20. Entonces ya podíamos hacer 3 paquetes y quedaban 20 libros. Después probamos a ver qué pasaba si hacíamos lo mismo con 8.000 y con 200 y vimos que funcionaba.

Maestra: ¿Y por qué lo hicieron así?
A1: Porque 8295 = 8000 + 200 + 95
A1: Sabemos que 4 x 25 = 100
Entonces 8 x 25 = 200
16 x 25 = 800
320 x 25 = 8000

Entonces podemos hacer 320 + 8 + 3 = 331 paquetes y quedan 20.

(Los trabajos de los 8 grupos quedan escritos en el pizarrón. Una vez que los chicos se dieron cuenta de que todos obtuvieron el mismo resultado y que completaron cálculos del grupo 1, la maestra les pide que comparen los diferentes procedimientos).

Maestra: ¿Cuál es el método más simple y a la vez más rápido? ¿Qué les parece?
A: El del grupo 8

Maestra: ¿Por qué?
A: Porque los cálculos son fáciles, son pocos, y me parece que está bien descomponer el número como cuando multiplicamos.

Maestra: ¿Pero hubiera sido lo mismo si hubieran hecha paquetes de 35?
A: Sería más difícil

Maestra: Bueno, aparte de este método, ¿qué podemos decir de los otros?
A: Seguro que los grupos 2 y 3 son los que hicieron más rápido, y además queda bien presentado, está claro.
A: El grupo 6 lo hizo parecido también, pero es más largo.
A: Los otros hicieron multiplicaciones, pero un poco al azar.

Maestra: Bueno, todos ustedes encontraron el número de paquetes y el número de libros restante. ¿Lo que hicieron es una división?
Respuesta unánime: ¡¡NO!!

Maestra: Sin embargo es un problema de división. Al principio todos ustedes trataron de hacer una división, ¿se acuerdan?
Y además ustedes calcularon un cociente de 331 y un resto de 20.

Son el cociente y el resto de la división de 8295 por 25.

Entonces todos ustedes hicieron una división, no con el método habitual, sino combinando las otras operaciones que conocen. No es otra cosa la división. En la próxima clase vamos a ver cómo podemos construir la técnica de la división a partir de restas sucesivas.[18]

— —

En primer lugar, podemos notar que la elección realizada por la maestra al presentar un problema abierto, favorece el debate acerca de la necesidad de establecer condiciones en el tratamiento de un problema, pues de no hacerlo la pregunta no podría responderse en este caso. Observemos que los chicos se pusieron de acuerdo en fijar la cantidad de libros que se va a colocar en cada paquete. Pero podría haber surgido, por ejemplo, fijar la cantidad de personas a las que hay que entregar la misma cantidad de libros, lo que daría lugar a otro problema.

Centrándonos en las intervenciones docentes, podemos notar que una vez organizados los grupos y mientras los chicos intentan resolver el problema, la maestra sugiere *hacer un cálculo con las operaciones que ya conocen*, pero en ningún momento dice qué operaciones considerar y cómo hacerlo. Si lo hubiese hecho, el problema estaría resuelto, y si no intervenía, posiblemente algunos alumnos no hubiesen podido avanzar.

Continuando con el análisis de las intervenciones docentes, en el momento que los chicos reconocen el procedimiento del grupo 8 como el más eficaz, la maestra cambia una de las variables, cantidad de libros por paquete, (M: *pero hubiera sido lo mismo si hubieran hecho paquetes de 35?*). Esto hace que los alumnos cuestionen la eficacia de ese procedimiento (A: *es más difícil*).

Posteriormente la docente propone continuar analizando cuáles de los procedimientos restantes resultan ventajosos.

Podemos observar que la maestra institucionaliza los siguientes conocimientos:

- se trata de un problema de división
- cuál es el cociente y cuál el resto
- se resolvió una división combinando otras operaciones

Es importante tener presente en esta clase, que la institucionalización se da al final de la misma, aunque de ningún modo significa que siempre sucederá en esta instancia. Hay ocasiones en las que es productivo hacer ese tipo de intervenciones en el medio de una resolución. Por ejemplo, si los alumnos han desplegado diversos procedimientos, se ven cansados y confundidos entre tanta producción, el maestro puede pedirles *hasta donde llegaron, ¿qué pueden decir del problema?; ¿A qué conclusiones aunque sean parciales llegaron?*

Sólo nos resta agradecerle su participación en esta capacitación.

18 La clase ha sido tomada de ERMEL: *Apprentissage mathématiques a l´ecole élémentaire*- Tomo 1. Corresponde a un curso en el que no se había enseñado el algoritmo de la división por dos cifras.

Bibliografía

DGCyE, *¿Qué entendemos por hacer matemática en la escuela?* La Plata, DGCyE, 2001.

DGCyE, *Orientaciones Didácticas para la enseñanza de la multiplicación en los tres ciclos de la EGB*. La Plata, DGCyE, 2001.

DGCyE. *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB*. La Plata, DGCyE, 2001.

Charlot, B*.,* "La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas", C*onferencia dictada en Cannes*, marzo 1986.

Napp, C., Novembre, A., Sadovsky, P., y Sessa, C. *La Formación de los Alumnos Como Estudiantes. Estudiar Matemática*, un documento elaborado dentro de la serie *Apoyo a los Alumnos de Primer Año en los Inicios del Nivel Medio*. Editado por el Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Secretaría de Educación – Dirección General de Planeamiento, 2000.

Moreno Beatriz, y Quaranta María Emilia. *Alfabetización en Matemática* (2005) Red de Apoyo Escolar y Educación Complementaria. RAE.

Quaranta, María Emilia y Wolman, Susana, "Qué, para qué y cómo se discute", en Panizza, M. y otros, *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB*. Buenos Aires, Paidós, 2004.

Gobernador
Sr. Daniel Scioli

Director General de Cultura y Educación
Prof. Mario Oporto

Subsecretario de Educación
Lic. Daniel Belinche

Director Provincial de Gestión Educativa
Prof. Jorge Ameal

Director Provincial de Educación de Gestión Privada
Dr. Néstor Ribet

Directora Provincial de Educación Primaria
Prof. María de las Mercedes González

Directora Provincial de Educación Superior y Capacitación Educativa
Lic. María Verónica Piovani

Directora de Capacitación
Lic. Alejandra Paz

Dirección General de
Cultura y Educación

Buenos Aires
LA PROVINCIA

DGCyE / Dirección de Capacitación
Torre Gubernamental 1, calle 12 y 50, piso 9
(0221) 429 5399
cpdircap@ed.gba.gov.ar
www.abc.gov.ar