CONTENIDOS

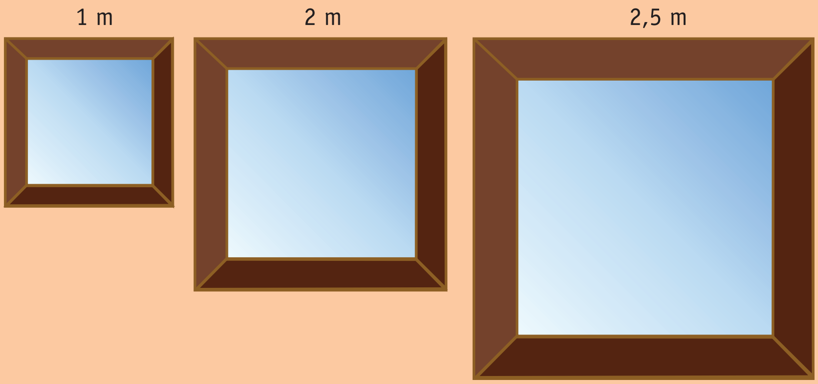
- El modelo cuadrático
- La función cuadrática
- Desplazamientos de la gráfica
- Máximos, mínimos, ceros, crecimiento y decrecimiento
- Ecuaciones cuadráticas
- Sistemas mixtos

En este capítulo se analizan funciones cuyas representaciones gráficas son curvas denominadas parábolas. Estas funciones son herramientas útiles para estudiar algunos procesos que no son lineales ni proporcionales. En estos procesos hay crecimientos, decrecimientos, puntos que pueden ser máximos o mínimos y otras particularidades como las que se presentan en este capítulo.

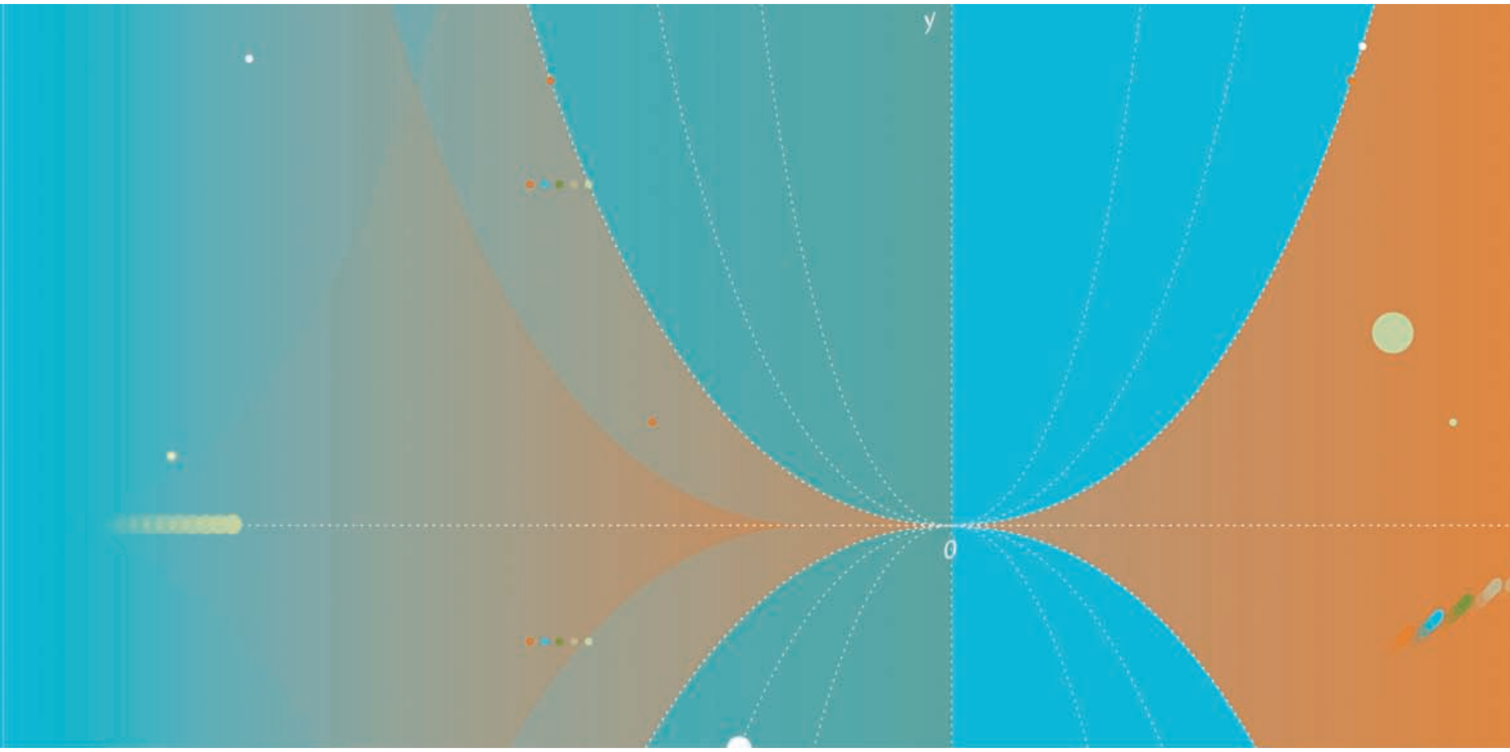
2 FUNCIONES CUADRÁTICAS

Problema 1

El precio de un espejo cuadrado depende de su tamaño y de si incluye marco de madera o no. El metro cuadrado de espejo cuesta $ 30 y el metro lineal de marco de madera cuesta $ 25 ¿Cuánto cuesta un espejo de 1 m de lado con marco? ¿Y uno de 2 m sin marco? ¿Cuánto cuesta un espejo de 2,5 m de lado con marco? ¿Con $ 367,50 de qué medidas se puede comprar un espejo sin marco? ¿Y si se quiere el espejo con marco? ¿Cuál es la fórmula que permite determinar el costo (en $) de un espejo cuadrado con marco, en función de la medida (en m) de su lado?



Para resolver este problema hay varias posibilidades. Una de ellas es hacer una tabla colocando las posibles medidas del lado del espejo y, a partir de ellas, calcular el precio del espejo solo, el precio del marco y el costo total.



Por ejemplo, un espejo cuadrado de 1 m de lado lleva 1 m^2 de espejo solo y 4 m de marco de madera; por lo tanto, su costo surge de sumar \$ 30 del metro cuadrado de espejo y \$ 25 por cada metro lineal de marco, o sea, \$ 100. Entonces, el espejo de 1 m de lado con marco cuesta \$ 130.

De manera similar puede calcularse el costo para otras medidas de lados.

Medida del lado (m)	Sup. de espejo (m^2)	Precio del espejo (\$)	Cantidad de m de marco	Precio del marco (\$)	Costo total (\$)
1	1	30	4	$25 \cdot 4 = 100$	130
2	4	$30 \cdot 4 = 120$	$2 \cdot 4 = 8$	$25 \cdot 8 = 200$	320
2,5	6,25	$30 \cdot 6{,}25 = 187{,}5$	$2{,}5 \cdot 4 = 10$	$25 \cdot 10 = 250$	437,50
4	16	$30 \cdot 16 = 480$	$4 \cdot 4 = 16$	$25 \cdot 16 = 400$	880
...	...	...	...	...	...
l	l^2	$30 \cdot l^2$	$l \cdot 4$	$25 \cdot 4 \cdot l$	$30 \cdot l^2 + 25 \cdot 4 \cdot l$

Un espejo de 2 m de lado sin marco cuesta \$ 120 y uno de 2,5 m de lado con marco \$ 437,50.

Para obtener el costo de un espejo cuadrado con marco de madera, sabiendo que cuesta \$ 30 el metro cuadrado de espejo solo y \$ 25 el metro lineal de marco, se eleva al cuadrado la medida del lado (l) del espejo y se multiplica el resultado por \$ 30; se multiplica la medida del lado por 4 (pues el marco tiene 4 lados iguales) y se multiplica por \$ 25. Finalmente, se suman ambos resultados. Con lo cual, el costo de un espejo cuadrado de lado l se puede calcular en dos partes. El costo del espejo es $30\,l^2$ y el del marco es $4 \cdot l \cdot 25 = 100l$. Luego, el costo total es $C(l) = 30l^2 + 100l$.

El modelo cuadrático

Para saber el costo de un espejo cuadrado de 2,5 m de lado, con marco, según los precios del problema 1, se puede también reemplazar l en la fórmula obtenida en la página anterior, y hacer los cálculos.

$$C(l) = 30l^2 + 100l$$
$$C(2{,}5) = 30 \cdot (2{,}5)^2 + 100 \cdot 2{,}5$$
$$C(2{,}5) = 30 \cdot 6{,}25 \quad + \quad 250$$
$$C(2{,}5) = 437{,}50$$

Es decir, el costo de un espejo con marco, cuyo lado mide 2,5 m es $ 437,50.

Una expresión con la variable elevada solamente a exponentes naturales, como $30\,l^2 + 100l$ recibe el nombre expresión cuadrática cuando el máximo exponente al que está elevada la variable l es 2.

Una **expresión cuadrática** es aquella cuya variable está elevada solo a exponentes naturales y el máximo exponente es 2. Se podría escribir entonces la expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y a es distinto de cero.

Otros ejemplos de expresiones cuadráticas son los siguientes.

$$5b - b^2 + 1$$
$$0{,}19\,x^2$$
$$7 + \sqrt{3}\,p^2$$

Se dice que una situación responde al modelo cuadrático cuando puede modelizarse mediante una expresión cuadrática.

La expresión que permite calcular el costo del espejo sin marco es: $30\,l^2$. Entonces si se tienen $367,50 para comprar el espejo, para saber la medida se puede resolver la ecuación: $30\,l^2 = 367{,}50$.

$l^2 = 367{,}50 : 30 = 12{,}25$	Se despeja l^2.
$l = 3{,}5$	Se extrae raíz cuadrada de ambos miembros. Se considera que el lado l toma solo valores positivos, por lo que se descarta la solución $l = -3{,}5$.

Luego, el espejo que puede comprarse es uno que tenga 3,5 m de lado.

Si en cambio se quiere comprar un espejo con marco se puede resolver la ecuación:

$$30\,l^2 + 100\,l = 367{,}50$$

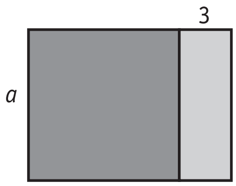
Una **ecuación cuadrática** es aquella en la que la variable esta elevada a exponentes naturales y el máximo exponente es 2.

Este tipo de ecuaciones se denominan ecuaciones cuadráticas y se resolverán a lo largo de este capítulo.

ACTIVIDADES

1. a. Encuentren una expresión que permita calcular el área de la siguiente figura, formada por un cuadrado y un rectángulo, en función de la longitud a del lado del cuadrado (medida en cm).

b. ¿Cuál es el área si a es 5 cm ?



La función cuadrática

Las funciones que están representadas por expresiones cuadráticas se denominan *funciones cuadráticas*. Por ejemplo: $f(x) = x^2$ representa una función cuadrática.

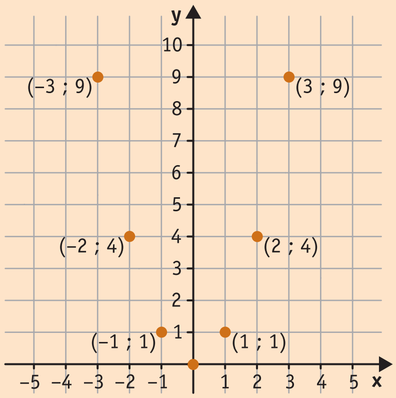
Problema 2

Representar gráficamente la función $f(x) = x^2$.

Para graficar la función f es útil hacer una tabla de valores, pero se puede anticipar que su gráfica contiene puntos cuyas ordenadas solo toman valores positivos o bien 0 pues los valores se obtienen elevando x al cuadrado.

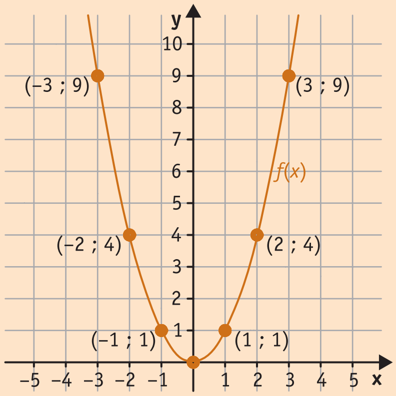
x	0	1	−1	2	−3	−2	3
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	9	4	9

Al trasladar los puntos de la tabla a un par de ejes cartesianos, se obtiene la siguiente gráfica.



Si se incorporaran todos los puntos intermedios a la gráfica se obtiene una curva de línea continua, como se muestra en la figura.

Una característica a destacar de esta gráfica es que a valores opuestos del dominio les corresponde la misma imagen, es decir $f(x) = f(-x)$, luego el eje y funciona como un espejo. Se dice entonces que el eje y es eje de simetría. Además, es posible determinar que el eje de simetría interseca a la curva en el punto (0 ; 0). Este punto se llama vértice.



La curva de esta función se denomina *parábola*.

El **dominio** de la función de fórmula $f(x) = x^2$ es el conjunto de todos los números reales y el **conjunto imagen** son todos los números positivos y el 0. En símbolos:
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0 ; +\infty)$

La gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$ es una curva denominada **parábola**. Tiene un **eje de simetría**, que coincide con el eje y, que la divide en dos ramas. El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría es el punto (0 ; 0) y se denomina **vértice**.

Funciones de fórmula $g(x) = a\,x^2$

Problema 3

Un diseñador gráfico está armando un libro de matemática y tiene que dibujar una serie de funciones, como las de la figura. Para eso le entregan la lista de fórmulas y gráficas. ¿Cómo puede saber cuál es la gráfica que corresponde a cada fórmula?

Fórmulas:

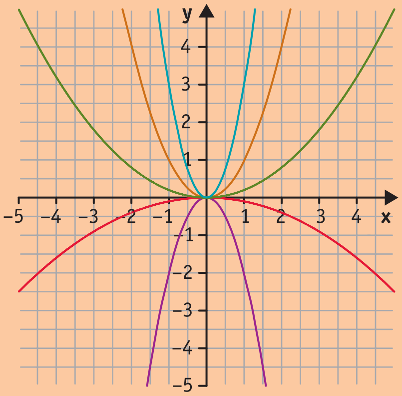
$f(x) = x^2$

$g(x) = 3x^2$

$h(x) = \frac{1}{5}x^2$

$t(x) = -\frac{1}{10}x^2$

$m(x) = -2\,x^2$



La gráfica naranja corresponde a $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/ f(x) = x^2$ dado que contiene a los puntos (1 ; 1), (−1 ; 1), (2 ; 4) y (−2 ; 4). Esto sucede debido a que la segunda coordenada de cada punto se obtiene elevando la primera al cuadrado. La gráfica azul corresponde a la fórmula $g(x) = 3x^2$ pues para $x = 1$, la imagen es 3. Es decir, los valores de las imágenes aumentan “más rápidamente”, con relación a la gráfica de $f(x) = x^2$ y, por lo tanto, la parábola es más cerrada.

La gráfica verde corresponde a $h(x) = \frac{1}{5}x^2$, ya que $h(1) = \frac{1}{5}$. O sea, las imágenes toman valores menores que las imágenes de $f(x) = x^2$ para los mismos valores de x. Por lo tanto, la parábola es más abierta.

En general para todas las funciones cuadráticas del tipo $g(x) = a\,x^2$, si el número a es mayor que 1, la parábola que representa la función está más cerca del eje de simetría que $f(x)$ y se va acercando al eje de simetría a medida que aumenta el valor de a. Si a está entre 0 y 1, $g(x)$ está más lejos del eje de simetría que $f(x)$ y se va abriendo o alejando del eje de simetría a medida que el valor de a disminuye.

Si a es negativo la parábola cambia de orientación, es decir, sus ramas apuntan hacia abajo, como en el caso de las parábolas violeta y roja.

Para determinar cuál es la fórmula que corresponde a cada una de ellas basta con seguir el mismo razonamiento anterior: la fórmula $t(x) = -\frac{1}{10}x^2$ corresponde a la parábola roja, que es más abierta, porque a tiene menor valor absoluto, y la violeta corresponde a $m(x) = -2\,x^2$ porque el valor absoluto de a es mayor que 1.

Si se compara la gráfica de $g(x) = ax^2$ con la de $f(x) = x^2$ resulta que la gráfica de g es:

- Igual a la de f, si $a = 1$.
- Más cerrada que la de f, si $a > 1$.
- Más abierta que la de f, si $0 < a < 1$.
- Más abierta que la de f pero con las ramas hacia abajo, si $-1 < a < 0$.
- Más cerrada que la de f pero con las ramas hacia abajo, si $a < -1$.
- Igual a la de f pero con las ramas hacia abajo, si $a = -1$.

ACTIVIDADES

2. Lautaro dice que las funciones cuya fórmula es del tipo $g(x) = ax^2$, con $a < 0$ siempre decrecen, mientras que si $a > 0$ crecen siempre. Ramiro dice que no está de acuerdo. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

3. a. Encuentren la fórmula de una función cuya fórmula es del tipo $g(x) = ax^2$ y que pasa por el punto (−5 ; 50).

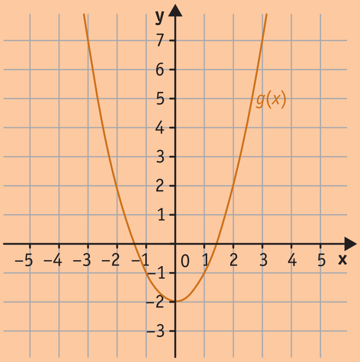
b. Encuentren la fórmula de una función cuya fórmula es del tipo $g(x) = ax^2$ y que pasa por el punto (−5 ; 51).

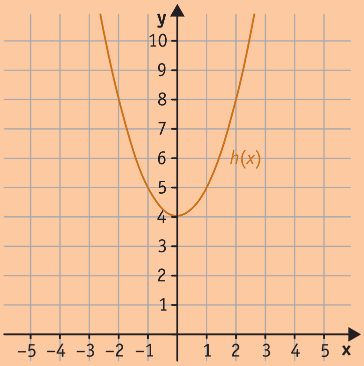
4. Dos funciones tienen por fórmula $f(x) = bx^2$ y $g(x) = c\,x^2$. Si $f(-3) < g(-3)$, ¿qué pueden decir de los valores de b y c? Expliquen cómo se dieron cuenta.

Desplazamientos verticales de la gráfica

Problema 4

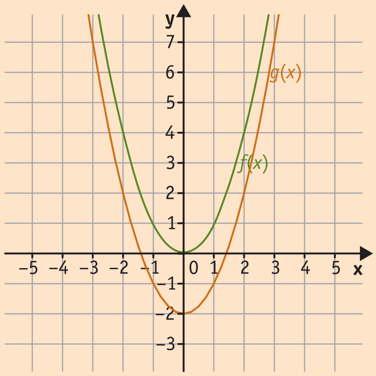
A un diseñador le piden que dibuje las gráficas siguientes. Para utilizar un graficador de funciones necesita conocer la fórmulas de las funciones representadas. ¿Cómo puede hacer para hallar la fórmula de las funciones $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?





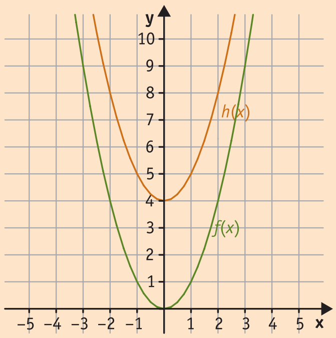
Al comparar la gráfica de g con la de $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x^2$

Es posible reconocer que todos los valores de las imágenes han disminuido dos unidades, por lo que la gráfica se desplazó dos unidades hacia abajo. Esto quiere decir que la fórmula de la función g es la de f menos dos. En símbolos, $g(x) = f(x) - 2 = x^2 - 2$



Entonces, la gráfica anterior representa la función $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = x^2 - 2$.
Si ahora se comparan $h(x)$ con $f(x)$.

Se observa que en lugar de restarle 2 unidades a $f(x)$, se le suman 4. Se obtiene la fórmula $h(x) = x^2 + 4$ que corresponde a una parábola desplazada o corrida 4 unidades hacia arriba respecto de la gráfica de f.



La gráfica de una función de fórmula $t(x) = x^2 + c$ tiene la misma forma que la gráfica de la función de fórmula $f(x) = x^2$, pero desplazada c unidades hacia arriba, si c es positivo, o $|c|$ unidades hacia abajo, si c es negativo. En estos casos varía la posición del vértice de la parábola pero no varía el eje de simetría.

ACTIVIDADES

5. Grafiquen las siguientes funciones $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $m(x) = x^2 + 1$; $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $g(x) = m(x) - 3$

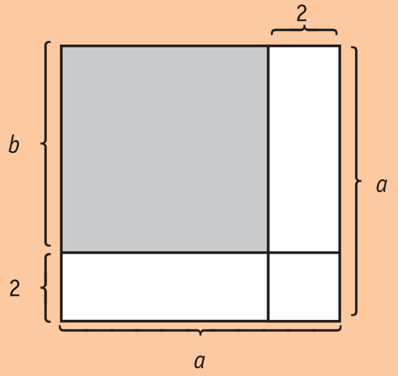
6. Si la gráfica de la función de fórmula $h(x) = x^2 + c$ contiene el punto $(0 ; 5)$, ¿cuánto vale c?

Desplazamientos horizontales de la gráfica

Problema 5

A un cuadrado de lado a, medido en centímetros, se le efectúan dos cortes, como se muestra en el dibujo y se obtiene el cuadrado de lado b.

Escribir una expresión que permita calcular el área (en cm^2) del cuadrado sombreado, en función de la longitud a (en cm) del lado del cuadrado mayor.



En la siguiente tabla se presentan algunos posibles valores de a y, a partir de ellos, el área del cuadrado sombreado.

Para construir la tabla se puede razonar así:

Si el lado del cuadrado mayor mide, por ejemplo, 3 cm, el lado del cuadrado sombreado mide 2 cm menos, es decir, 1 cm y su área, 1 cm^2.

Longitud del lado del cuadrado mayor (en cm)	3	5	4	10
Área del cuadrado sombreado (en cm^2)	1	9	4	64

En general, si el lado del cuadrado mayor mide a, b mide $a - 2$ y este resultado se eleva al cuadrado para obtener el área del cuadrado de lado b.

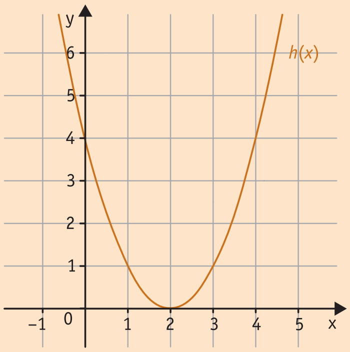
Esto puede escribirse mediante una expresión cuadrática, de la siguiente manera:

$S(a) = (a - 2)^2$, donde a es la longitud en cm del lado del cuadrado mayor, y $S(a)$ es el área del cuadrado sombreado, en cm^2.

Como $S(a) = (a - 2)^2 = (a - 2)\ (a - 2) = a^2 - 2a - 2a + 4 = a^2 - 4a + 4$, la expresión responde a un modelo cuadrático.

Fuera del contexto del problema analizado, en la que los valores de a son medidas de un lado de un cuadrado, existe una función h de fórmula $h(x) = (x - 2)^2$, que admite cualquier valor real de x. Si para graficar $h(x)$ se realiza una tabla de valores se obtiene:

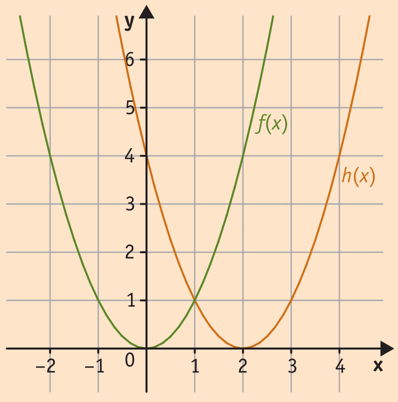
x	$h(x)$
0	4
1	1
–1	9
2	0
3	1
4	4



En la función de fórmula $h(x) = (x - 2)^2$, la variable x admite cualquier valor real, pero las imágenes son mayores o iguales a 0 porque se obtienen elevando $x - 2$ al cuadrado. Es decir, Dom $(h) = \mathbb{R}$, Im$(h) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0\,;+\infty)$

Al observar el gráfico de $h(x)$, es lógico pensar que la gráfica puede construirse a partir de la gráfica de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$.

Si se grafican $f(x) = x^2$ y $h(x) = (x - 2)^2$ en un mismo par de ejes cartesianos, es posible observar en la gráfica que $h(x)$ está desplazada 2 unidades hacia la derecha respecto de la gráfica de $f(x)$, y el 2 que aparece restando en la fórmula no indica, en este caso, desplazamiento hacia la izquierda, sino hacia la derecha.
El vértice pasó a ser el punto (2 ; 0) y el eje de simetría, la recta $x = 2$.

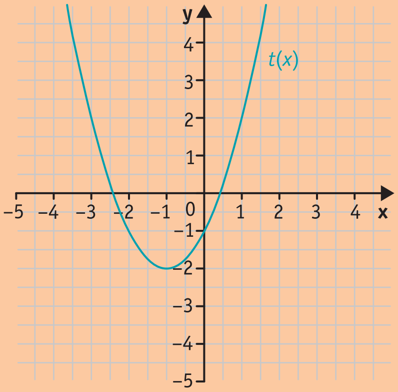


La gráfica de una función de fórmula $m(x) = (x - a)^2$ es como la de la función de fórmula $f(x) = x^2$, pero desplazada $|a|$ unidades hacia la izquierda si $a < 0$, o a unidades hacia la derecha si $a > 0$.

Desplazamientos de la gráfica

Problema 6

Encontrar, si es posible, la fórmula de una función cuadrática, $t(x)$, cuya gráfica sea la siguiente.



Para conocer la fórmula de la función representada se puede razonar así.

Esta gráfica está desplazada una unidad hacia la izquierda respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$, por lo tanto, en lugar de x^2, su expresión contiene a la potencia $(x + 1)^2$. Pero también se desplazó dos unidades hacia abajo, entonces, se resta 2 a la expresión anterior y la fórmula resulta: $t(x) = (x + 1)^2 - 2$.

El vértice de $t(x)$ resulta entonces el punto (–1 ; –2) y su eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = -1$.

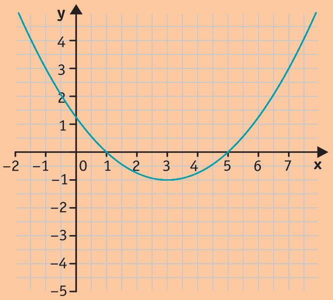
En general, si la fórmula de una función cuadrática puede expresarse como $h(x) = (x - a)^2 + b$ entonces la gráfica de h puede verse como un desplazamiento de la función $f(x) = x^2$, $|a|$ unidades hacia la derecha o la izquierda y $|b|$ unidades hacia arriba o hacia abajo. El vértice de $h(x)$ es el punto $(a ; b)$ y su eje de simetría es la recta $x = a$.

Si una función cuadrática tiene por fórmula la expresión $g(x) = (x - a)^2 + b$ su gráfica es igual a la de $f(x) = x^2$ pero desplazada a unidades hacia la derecha y b unidades hacia arriba, si a y b son ambos positivos. Si a y b son ambos negativos, el corrimiento es hacia la izquierda y hacia abajo. Si a es positivo y b negativo, se desplaza hacia la derecha y hacia abajo, y si a es negativo y b positivo, hacia la izquierda y hacia arriba. En todos los casos, el vértice de la parábola, en lugar de ser el punto (0 ; 0), es el punto $(a ; b)$ y su eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = a$.

Problema 7

¿Cómo puede hallarse la fórmula de la función cuadrática j correspondiente a la siguiente gráfica, conociendo las coordenadas de algunos de sus puntos, como se muestra en la tabla?

x	j(x)
3	–1
5	0
1	0



La tabla de valores solo muestra algunos puntos que pertenecen al gráfico de j, pero a partir de la información de la tabla y de la gráfica, es posible reconocer que el vértice es el punto $(3\ ;\ -1)$, y que $j(3) = -1$. Por lo tanto, la fórmula de la función j debe contener la expresión $(x - 3)^2 - 1$, pues su gráfica se encuentra desplazada 3 unidades hacia la derecha y una hacia abajo respecto de la gráfica de $f(x) = x^2$. Puede pensarse, entonces, que la fórmula de j es $j(x) = (x - 3)^2 - 1$.

Sin embargo, si se calcula por ejemplo, $j(5)$ resulta que $j(5) = (5 - 3)^2 - 1 = 3$ pero, según la tabla y la gráfica, $j(5) = 0$.

Esta diferencia se debe a que en la fórmula considerada para j falta un valor de $a \neq 1$. Es decir, $j(x) = a(x - 3)^2 - 1$.

Para determinar el valor de a puede usarse la información que aportan la tabla y la gráfica: $j(5) = 0$ y resolver la ecuación que se obtiene.

$$a(5 - 3)^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, $j(x) = \frac{1}{4}(x - 3)^2 - 1$

Una función cuadrática puede expresarse mediante la fórmula:
$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Las coordenadas del vértice de la parábola son:

$(x_v ; y_v)$

ordenada del vértice

abscisa del vértice

y se verifica que $f(x_V) = y_V$.

Esta expresión se denomina **forma canónica** de la función cuadrática.

Así definida la función j, sucede también que $j(1) = 0$, pues $x = 1$ es simétrico a $x = 5$ respecto al eje de simetría. Es decir, si para un elemento del dominio que está, por ejemplo, dos unidades a la derecha del eje, la función toma un cierto valor, para el elemento que está dos unidades a la izquierda, debe tomar el mismo.

Problema 8

Una función cuadrática está definida por la expresión: $f(x) = a(x - 1)^2 + y_V$, con $a \in \mathbb{R}$, y su gráfica contiene a los puntos $(1\ ;\ 1)$ y $(2\ ;\ 3)$. ¿Cómo se pueden determinar los valores de a y de y_V?

Como la parábola contiene al punto $(1\ ;\ 1)$, se verifica que $f(1) = 1$. Por lo tanto,

$$f(1) = a(1 - 1)^2 + y_V \quad \Leftrightarrow \quad 1 = a \cdot 0 + y_v \quad \Leftrightarrow \quad 1 = y_v$$

Con esta nueva información y considerando que la parábola contiene al punto $(2\ ;\ 3)$, se debe cumplir lo siguiente: $f(2) = 3 = a(2 - 1)^2 + y_v$

Como $y_v = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = a \cdot 1 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$

Es decir, la fórmula de f es $f(x) = 2(x - 1)^2 + 1$.

7. Escriban la fórmula de dos funciones cuadráticas diferentes que tengan su vértice en $(-2\,;\,4)$.

8. La gráfica de la función de fórmula $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$ verifica que $f(2) = 0$. Encuentren el otro valor de x para el cual $f(x) = 0$.

9. Expliquen cómo puede determinarse si la gráfica de la función de fórmula $f(x) = 3(x+1)^2 + 2$ interseca al eje x.

10. Grafiquen las funciones cuyas fórmulas se indican a continuación.

a. $f(x) = (x-2)^2 + 3$ **b.** $t(x) = -2x^2 + 3$

c. $h(x) = \frac{2}{3}(x-4)^2 + 1$ **d.** $g(x) = -4\,(x+1)^2$

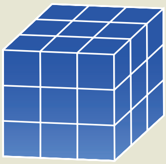
11. ¿Cuál de los siguientes puntos pertenece al gráfico de la función de $f(x) = 5(x+1)^2 - 3$?

$A = (-1\,;\,0)$; $B = (-1\,;\,-3)$; $C = (2\,;\,42)$; $D = (42\,;\,2)$

12. Si $f(x) = 3\,(x-4)^2 + k$. ¿Cuál debe ser el valor de k para que se verifique $f(5) = 0$?

13. Determinen el o los valores de a de manera tal que la gráfica de $f(x) = ax^2 - a$ contenga al punto $(0\,;\,-1)$.

14. Un cubo de madera está pintado de azul, y se le realizan dos cortes en cada sentido, como se muestra en la figura.

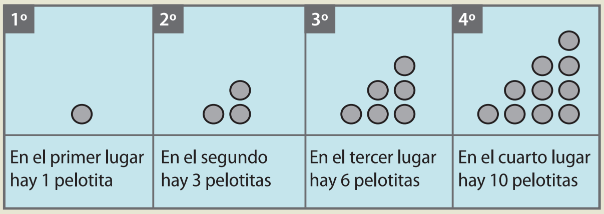


a. ¿Cuántos cubitos tienen únicamente una cara azul?

b. Si se hubieran efectuado tres cortes en cada sentido, ¿cuántos cubitos tendrían una cara azul? ¿Y si se hubieran efectuado cuatro cortes en cada sentido?

c. Construyan una fórmula que permita calcular la cantidad de cubitos que tienen una cara azul, en función de la cantidad de cortes por arista.

15. El siguiente esquema se ha construido a partir de agregar una pelotita a la base y a la altura de un triángulo rectángulo, y completando la hipotenusa.



a. ¿Cuántas pelotitas habrá en el quinto lugar? ¿Y en el décimo?

b. ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular la cantidad de pelotitas que hay en el lugar n de la cadena? Expliquen cómo se dieron cuenta.

I. $n+3$ **II.** $\frac{n(n+1)}{2}$ **III.** $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ **IV.** $\frac{n}{2} \cdot \frac{(n+1)}{2}$

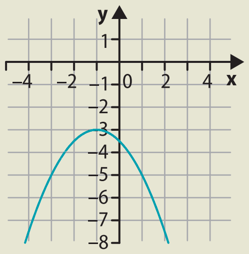
c. ¿Es posible que en algún lugar de la cadena haya 7895 pelotitas? ¿Por qué?

d. ¿En qué lugar de la cadena se contarán 3240 pelotitas? ¿Por qué?

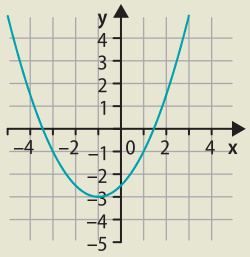
16. La gráfica de una función cuadrática contiene a los puntos $(-5\,;\,7)$ y $(18\,;\,7)$. ¿Es suficiente esta información para conocer las coordenadas de su vértice? ¿Por qué?

17. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$? Expliquen cómo se dieron cuenta.

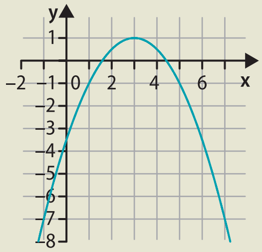
a



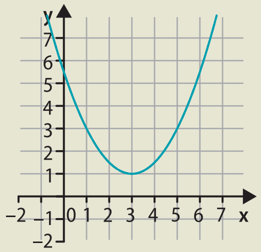
b



c

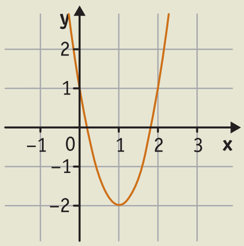


d



a **b** **c** **d**

18. Hallen la fórmula de la función cuya gráfica es la siguiente:



19. Hallen la fórmula de una función cuadrática cuyo eje de simetría es la recta $x = -4$, su conjunto imagen es $[-6\,;\,+\infty)$ y pasa por el origen de coordenadas.

Máximos, mínimos, ceros, crecimiento y decrecimiento

En algunas situaciones, modelizar los hechos mediante una función cuadrática ayuda a tomar decisiones, como en el siguiente caso.

Problema 9

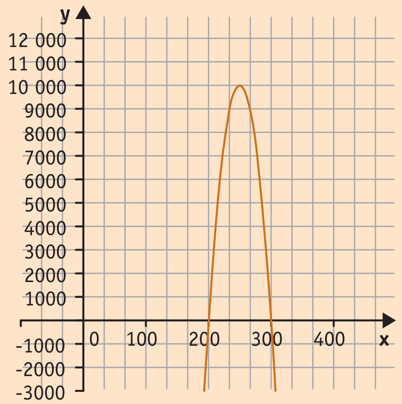
Una fábrica de impresoras quiere lanzar al mercado un nuevo modelo. Para ello se realiza un estudio y se determina que la ganancia (en miles de pesos) está dada por el precio de venta (en pesos) y esta relación viene establecida por la siguiente fórmula: $g(p) = -4\,(p - 250)^2 + 10\,000$, donde p representa el precio de venta.

a. ¿A qué precio conviene vender las impresoras para obtener la máxima ganancia?

b. ¿Existe algún precio para el cual no haya ganancia?

La gráfica de g es una parábola con sus ramas hacia abajo, pues el coeficiente a de la fórmula es negativo.

Además, la gráfica está desplazada 250 unidades hacia la derecha y 10 000 unidades hacia arriba, respecto de la de $f(x) = x^2$. Su vértice es el punto (250 ; 10 000).



El vértice de una parábola determina el valor máximo que toma la función cuando el coeficiente a es negativo, y el valor mínimo cuando el coeficiente a es positivo.

$\sqrt{a^2} = |a|$

Por lo tanto, si a es un número positivo, la ecuación $x^2 = a$, puede resolverse aplicando raíz cuadrada en ambos miembros:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{a} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a}$

La ecuación tiene entonces dos soluciones: $x = \sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$.

Los valores del dominio para los cuales la función vale cero se llaman **raíces** o **ceros**. En esos puntos, la gráfica interseca el eje x.

Para encontrar los ceros de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$ es suficiente resolver la ecuación $a(x - x_v)^2 + y_v = 0$.

A partir del gráfico es posible reconocer que el vértice de la parábola corresponde al valor *máximo* de $g(p)$ e informa que el precio conveniente es de \$ 250 para que la ganancia sea de \$ 10 000, o sea, la máxima posible.

Para hallar los valores que corresponden a una ganancia nula hay varias posibilidades. Una es observar qué puntos de la gráfica intersecan el eje horizontal, es decir, cuáles son sus ceros. En este caso parece que si el precio de venta es \$ 200 o \$ 300, la ganancia es \$ 0, pero este método no siempre es exacto.

Otra posibilidad es expresar la ganancia nula como $g(p) = 0$, reemplazar por su fórmula y hallar los ceros resolviendo la ecuación obtenida.

$-4(p - 250)^2 + 10\,000 = 0$	Se reemplaza $g(p)$ por su expresión cuadrática.
$-4(p - 250)^2 = -10\,000$ $(p - 250)^2 = \dfrac{-10\,000}{-4} = 2500$	Se despeja.
$\lvert p - 250 \rvert = 50$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.

Para que esta última condición se verifique, debe ocurrir que $p - 250 = 50$ o bien $p - 250 = -50$.

Por lo tanto, $p = 300$ o bien $p = 200$ son soluciones de la ecuación, es decir, para ambos valores de p, $g(p) = 0$, como se observa en la gráfica.

Por otro lado, es posible reconocer que si las impresoras se venden, por ejemplo, a \$ 50 o a \$ 400 hay pérdida. Lo mismo ocurre para todos aquellos valores de p para los cuales la parábola se encuentra por debajo del eje horizontal. Es decir si las impresoras se venden a menos de \$ 200 o a más de \$ 300 no habrá ganancia sino pérdidas. Estos valores pertenecen al conjunto de negatividad de g.

Se producirá ganancia si el precio de venta está entre \$ 200 y \$ 300. Estos son los valores que pertenecen al conjunto de positividad de la función.

También es posible observar que los valores de p menores que 250 tienen imágenes cada vez mayores a medida que aumentan, es decir, la función g es creciente para los valores del dominio menores que 250. De igual modo, los valores de p mayores que 250 tienen imágenes cada vez menores a medida que aumentan y, por lo tanto, la función g es decreciente para los valores de p mayores que 250.
Es posible, entonces, establecer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: g es creciente en el intervalo $(-\infty\ ;\ 250)$ y es decreciente en el intervalo $(250\ ;\ +\infty)$.

El **conjunto de positividad** de una función es el conjunto de valores del dominio cuyas imágenes son positivas. Es decir, las abscisas de los puntos de su gráfica cuyas ordenadas son positivas. Se simboliza C^+.

El **conjunto de negatividad** de una función es el conjunto de valores del dominio cuyas imágenes son negativas. Es decir, las abscisas de los puntos de su gráfica cuyas ordenadas son negativas. Se simboliza C^-.

Si en determinado intervalo del dominio, los valores de una función van incrementándose a medida que crece el valor de la coordenada x, la función es **creciente** en ese intervalo, y si los valores van decreciendo a medida que se incrementan los valores de x, la función es **decreciente** en ese intervalo.

Problema 10

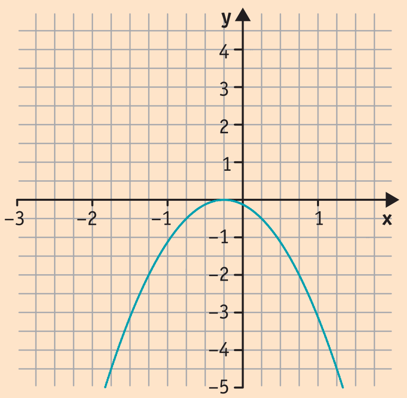
Encontrar, si existen, los ceros de las siguientes funciones y realizar su gráfica.

a. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ r(x) = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$ **b.** $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ t(x) = 4(x - 3)^2 + 1$

Para hallar las raíces o ceros de r a partir de la fórmula, basta con resolver la ecuación $(-2)\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$, de donde se obtiene que $x = -\frac{1}{4}$.

Además, es posible reconocer que la gráfica de r está desplazada $\frac{1}{4}$ de unidad hacia la izquierda, con respecto a la gráfica de $f(x) = x^2$, pero no está desplazada ni hacia arriba ni hacia abajo. Por lo tanto, su gráfica es la siguiente.

Es decir, esta función tiene un solo cero en $x = -\frac{1}{4}$ y se verifica que $r\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$.
Las ramas de $r(x)$ van para abajo pues $a = -2 < 0$.



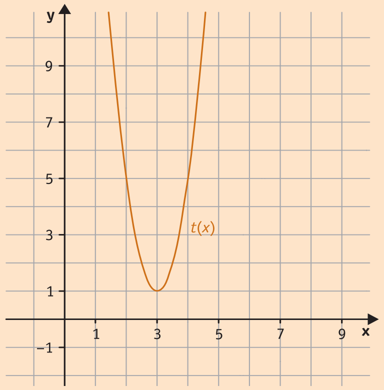
En este caso, la gráfica interseca al eje x en un solo punto. Este punto coincide con el vértice de la parábola.

Si una función tiene una sola raíz, ese valor coincide con la abscisa del vértice.

A partir de la fórmula $t:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $t(x) = 4(x - 3)^2 + 1$, es posible reconocer que la gráfica de la función t está desplazada 3 unidades hacia la derecha y una unidad hacia arriba con respecto a la gráfica de $f(x) = x^2$. Además, como la expresión cuadrática $(x - 3)^2$ está multiplicada por 4, la parábola correspondiente tiene sus ramas hacia arriba.

En consecuencia, la gráfica de t es la siguiente.

Es posible observar que la función t no tiene ceros o raíces reales. Es decir, no hay ningún valor x del dominio para el cual $t(x) = 0$.
O sea la gráfica de la función t no interseca al eje x.



A partir de la observación de la fórmula puede decidirse que la función no valdrá nunca 0, es decir que $4(x - 3)^2 + 1$ nunca da cero. Esta última afirmación también se puede determinar a partir de resolver la ecuación: $t(x) = 0$.

$4(x - 3)^2 + 1 = 0$	Se reemplaza $t(x)$ por su expresión.
$(x - 3)^2 = -\frac{1}{4}$	Se despeja.

Para que se verifique la última igualdad, $(x - 3)^2$ debe ser negativo; pero esto es imposible ya que $(x - 3)^2$ es un cuadrado y entonces nunca puede ser negativo. Es decir, no hay ningún número real x que cumpla con la condición pedida.

Esta imposibilidad determina que la función t no tenga raíces reales.

20. Encuentren la expresión de una función cuadrática que tenga una sola raíz en $x = 5$.
¿Hay una única función que cumple con esta condición? ¿Por qué?

21. Si $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ y se sabe que tiene un cero en $x = 1$.
Encuentren el otro cero sin resolver la ecuación correspondiente.

22. Dada la función cuadrática de fórmula: $g(x) = -3 \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{2}{5}$.

a. Hallen el conjunto imagen de g.

b. Encuentren dos valores del dominio que tengan la misma imagen.

23. Encuentren la fórmula de una función cuadrática $h(x)$ que verifica simultáneamente:

a. $h(-2) = h(4)$,

b. el mínimo valor de la función es -4,

c. 4 es una de sus raíces.

¿Cuántas funciones hay que verifican todas las condiciones? ¿Por qué?

24. Encuentren la fórmula de una función cuadrática $m(x)$ que corta al eje de ordenadas en el punto $(0 ; 5)$ y que tiene por eje de simetría a la recta $x = -2$. ¿Cuántas funciones hay que verifican todas las condiciones? ¿Por qué?

25. Sin hacer cuentas, demuestren que la función de fórmula $g(x) = -5 \cdot (x - 2)^2 - 1$ es negativa para todos los valores reales de x.

26. ¿Cuántas raíces reales tiene la función $h(x) = -2(x - 3)^2 + 4$? ¿Es posible responder la pregunta sin hacer cuentas?

27. Encuentren la fórmula de una función cuadrática que tenga dos raíces reales positivas y cuya ordenada al origen sea negativa. ¿Cuántas funciones cumplen con estas condiciones?

28. Hallen, si es posible, la fórmula de una función cuadrática que no tiene raíces reales y que es positiva para todos los valores de x.
¿Cuántas funciones cumplen con estas condiciones? ¿Por qué?

Funciones de fórmula $g(x) = ax^2 + bx$

En el problema 1, que aparece al comienzo del capítulo, se construyó una expresión como la siguiente:

$$C(l) = 30l^2 + 100l$$

Fuera del contexto de la situación mencionada, l puede ser cualquier número real y la función cuadrática expresada mediante esa fórmula puede ser sometida al mismo análisis realizado anteriormente.

Problema 11

Hallar los ceros, el vértice y la gráfica de la función $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / C(l) = 30\,l^2 + 100l$.

Para hallar los ceros de C, es necesario resolver la ecuación $C(l) = 0$.

$30\,l^2 + 100l = 0$	Se reemplaza $C(l)$ por su expresión.
$10l\,(3l + 10) = 0$	Se puede transformar la expresión en una equivalente sacando factor común $10l$.
$10l = 0$ o $3l + 10 = 0$	Si un producto de dos números es 0, es porque alguno de los números es cero.
$l = 0$ o $l = -\frac{10}{3}$	Se resuelven las ecuaciones obtenidas.

Para que un producto sea cero alguno de sus factores debe valer 0.
En símbolos:
$a \cdot b = 0 \iff a = 0$ o $b = 0$

La soluciones, $l = 0$ y $l = -\frac{10}{3}$, son las raíces de la función. La función interseca al eje x en los puntos $(0\,;\,0)$ y $\left(-\frac{10}{3}\,;\,0\right)$.

A partir de estos valores se puede encontrar el vértice, pues su abscisa está en el punto medio entre 0 y $-\frac{10}{3}$, es decir, $x_v = \dfrac{0 + \left(-\frac{10}{3}\right)}{2} = -\frac{5}{3}$. Y, conociendo el valor de x_v, es posible determinar el valor de y_v de la siguiente manera.

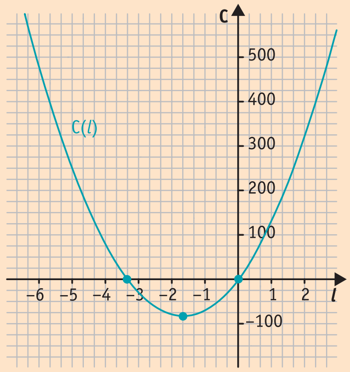
$$C\left(-\frac{5}{3}\right) = 30\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 100 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{3}$$

Por lo tanto, el vértice se encuentra en el punto $\left(-\frac{5}{3}\,;\,-\frac{250}{3}\right)$.

Si los ceros de la función cuadrática $f(x)$ son x_1 y x_2, entonces es posible calcular el x_V de la siguiente manera:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

El vértice de la parábola es el punto $\left(-\frac{5}{3}\,;\,-\frac{250}{3}\right)$ y la gráfica interseca al eje x en los puntos $(0\,;\,0)$ y $\left(-\frac{10}{3}\,;\,0\right)$.



Todas las funciones de fórmula $f(x) = ax^2 + bx$, tienen una raíz en $x = 0$. Luego, todas pasan por el origen de coordenadas.

Funciones de fórmula $g(x) = ax^2 + bx + c$

Problema 12

Dada la función $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$ determinar, su vértice, sus ceros y su gráfica.

Si se analiza y grafica la función $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$, es posible imaginarse que la gráfica de $g(x)$ será como la de $h(x)$ pero desplazada $\frac{13}{2}$ unidades hacia arriba.

Para graficar $h(x)$ es necesario hallar sus ceros y su vértice.

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$	Se plantea la ecuación que permite calcular los ceros de $h(x)$.
$\frac{1}{2}x\,(x-6) = 0$	Se saca factor común $\frac{1}{2}x$.
$\frac{1}{2}x = 0 \text{ o } x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 6$	Se resuelve la ecuación.

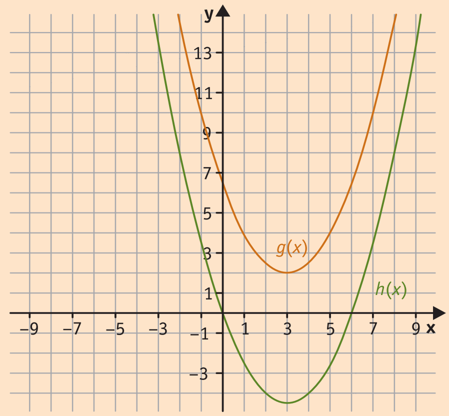
Como los ceros son simétricos respecto al eje de simetría, el mismo se encuentra en el valor medio entre $x = 0$ y $x = 6$, es decir en la recta $x = 3$. Por lo tanto $x_V = 3$. A partir de él, $y_V = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = -\frac{9}{2}$.

Es posible graficar entonces $h(x)$ y a partir del mismo $g(x)$ desplazando $h(x)$ $\frac{13}{2}$ de unidades hacia arriba.

En el gráfico se observa que el eje de simetría de $g(x)$ coincide con el de $h(x)$. Es decir el vértice de $g(x)$ tiene como primera coordenada a 3.

Para calcular la ordenada:

$y_V = g(x_V) = \frac{1}{2}\,3^2 - 3 \cdot 3 + \frac{13}{2} = 2$



Dado que el vértice de $g(x)$ es V = (3 ; 2) su fórmula es del tipo $g(x) = a(x-3)^2 + 2$.

Para determinar el valor de a se puede buscar un punto que pertenece a la gráfica, por ejemplo, (5 ; 4). Luego:

$$4 = g(5) = a(5-3)^2 + 2 = 4a + 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$$

Las fórmulas $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$ representan la misma función, o sea, son equivalentes. Pero, *¿cómo se puede transformar una en otra?*

$\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 2$	Se desarrolla el cuadrado del binomio.
$\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} + 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$	Se aplica la propiedad distributiva y se opera.

Con lo cual ambas fórmulas son equivalentes. A la forma $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ se la llama *forma canónica* de la función cuadrática y a la forma $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$ se la denomina *forma polinómica* de la función cuadrática.

Una función cuadrática puede definirse a través de una fórmula como la siguiente: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$.
A esta manera de escribir la fórmula de una función cuadrática se la llama **forma polinómica**.

Para pasar de la forma canónica de una función cuadrática, $h(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, a su forma polinómica basta con desarrollar el cuadrado y operar.

Problema 13

En un laboratorio se realizó un estudio en una colonia de microorganismos, sin proporcionarles alimento durante todos los días que duró la investigación, y se estableció que la cantidad m (en millones) de microorganismos variaba en función del tiempo t (en días) transcurridos desde que se originó el estudio, según la siguiente fórmula:

$$m(t) = -\frac{1}{2}\,t^2 + 3t + \frac{7}{2}$$

a. ¿Con qué cantidad de microorganismos se comenzó?

b. ¿Cuál fue la mayor cantidad de microorganismos obtenida?

c. ¿Desaparecen todos los microorganismos en algún momento? Si es así, ¿cuándo?

d. ¿En qué momentos aumenta la cantidad de microorganismos y en que momento disminuye?

Para responder a la pregunta **a.**, se debe considerar que cuando comienza el experimento el valor de t es 0, entonces es posible establecer la cantidad de microorganismos en ese instante reemplazando t por 0 en la fórmula. Es decir,

$$m(0) = -\frac{1}{2}\cdot 0^2 + 3\cdot 0 + \frac{7}{2} \quad\Rightarrow\quad m(0) = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Por lo tanto, en el comienzo del ensayo había 3,5 millones de microorganismos.

Para poder determinar la cantidad máxima de microorganismos que hubo, que es la pregunta **b.**, es necesario encontrar las coordenadas del vértice de la parábola, ya que no surgen de la fórmula escrita en forma polinómica. Es conveniente, entonces, escribir la fórmula de la función en forma canónica.

En algunas ocasiones, la forma polinómica de una función cuadrática es una expresión algebraica de tres términos que puede escribirse como el cuadrado de un binomio y, por eso, se la denomina *trinomio cuadrado perfecto*.

Para determinar si un trinomio es cuadrado perfecto, hay que identificar entre sus términos dos cuadrados y el doble del producto de las bases de esos cuadrados.

Por ejemplo, $t^2 - 6t + 9 = t^2 - 2\cdot 3\cdot t + 3^2 = (t-3)^2$

Cuando ese trinomio no es cuadrado perfecto, como en el caso de la expresión $t^2 - 6t - 7$, se puede intentar transformarlo en una expresión equivalente que contenga un trinomio cuadrado perfecto de la siguiente manera:

- El primer término es el cuadrado de t.
- El segundo término es $6t$ que es equivalente a $2\cdot 3\cdot t$, con lo cual puede pensarse como el doble de $3t$.
- Se necesita tener un término que sea el cuadrado del segundo número, es decir 3^2. Este número no está en el trinomio original, por lo tanto, se suma y se resta para que no varíe la expresión.

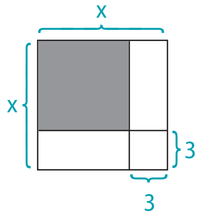
Entonces: $t^2 - 6t - 7 = t^2 - 2\cdot 3\cdot t + 9 - 9 - 7 = (t-3)^2 - 16$.

Para hallar las coordenadas del vértice de $m(t)$ se puede proceder de la siguiente manera.

$-\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - 6t - 7)$	Se saca factor común $-\frac{1}{2}$.
$-\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}\left[(t-3)^2 - 16\right]$	Se transforma el trinomio en una expresión equivalente.
$-\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-16)$	Se aplica la propiedad distributiva.
$-\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + 8$	Se opera y se escribe la forma canónica.

En una función cuadrática de fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$, el punto donde la gráfica de la función interseca al eje y es $(0\,;c)$ pues $f(0) = c$.
La ordenada al origen de f es entonces c.

La expresión $(x-3)^2$ puede pensarse como
$(x-3)\,(x-3) = x^2 - 3x - 3x + 9$
$(x-3)\,(x-3) = x^2 - 6x + 9$
Otra manera de interpretar la expresión anterior es mediante un cuadrado de lado x, como el siguiente:



El área de la zona sombreada puede determinarse de dos maneras:
- como el área de un cuadrado de lado $(x-3)$, es decir, $(x-3)\,(x-3)$.
- quitándole al área del cuadrado grande las áreas de dos rectángulos y agregándole el área del cuadrado más pequeño, es decir, $x^2 - 3x - 3x + 3\cdot 3 = x^2 - 6x + 9$.

Para determinar si un trinomio es cuadrado perfecto, hay que identificar entre sus términos dos cuadrados y el doble del producto de las bases de esos cuadrados.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Es decir, $m(t) = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + 8$

La forma canónica de $m(t)$ obtenida permite reconocer que el vértice es el punto (3 ; 8) y que éste es el punto máximo, ya que el coeficiente a es negativo. La interpretación de estos valores provee la respuesta de la pregunta **b.**, la mayor cantidad obtenida fue 8 millones de microorganismos a los 3 días.

Para responder la pregunta **c.**, es suficiente hallar los ceros de la función cuadrática que representa el problema y, para eso, es posible proceder de la siguiente manera.

Como se puede expresar la fórmula de la función de dos maneras equivalentes, $m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$, o bien $m(t) = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + 8$, para determinar si se anula la función hay que encontrar el valor de t para el cual alguna de las dos expresiones sea 0.

Al igualar a 0 la expresión polinómica de $m(x)$, resulta complicado saber cuánto vale t, en cambio, si se iguala a 0 la expresión canónica, la resolución de la ecuación obtenida es más sencilla.

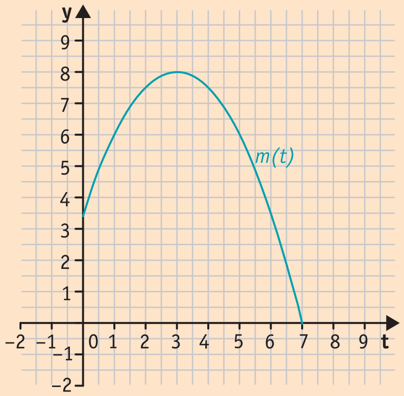
$-\frac{1}{2}(t-3)^2+8=0$	Se iguala a 0 la expresión canónica.
$-\frac{1}{2}(t-3)^2=-8$ $(t-3)^2=16$	Se despeja.
$\lvert t-3 \rvert = 4$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.
$t-3=4$ o $t-3=-4$	Se aplica la definición de módulo.
$t=7$ o $t=-1$	Se resuelve.

Como t representa cantidad de días, de las dos soluciones obtenidas solo $t = 7$ tiene sentido en el contexto del problema, entonces, la cantidad de microorganismos será 0 luego de 7 días.

En síntesis, $m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + 8$, el vértice es (3 ; 8) y las raíces son $t_1 = 7$ y $t_2 = -1$.

Con esos datos, es posible trazar la gráfica de la función m en el contexto del problema.

Es posible observar en el gráfico que la cantidad de microorganismos va aumentando hasta los 3 días y después disminuye hasta que desaparecen en el día 7. Es decir, en el contexto del problema, la función crece en (0 ; 3) y decrece en (3 ; 7).



ACTIVIDADES

29. Encuentren el vértice, las raíces y tracen la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

$f(x) = 5(x-3)^2 - 4$ $\quad$ $h(x) = -3(x+1)^2 + 2$

$t(x) = x^2 - 2x + 4$ $\quad$ $m(x) = x^2 + 6x + 1$

30. Una función cuadrática tiene fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$. ¿Es posible determinar el valor de la abscisa del vértice resolviendo $x_v = -\frac{b}{2a}$? ¿Cómo se puede obtener, de manera similar, el valor de y_v?

Otra manera de encontrar las raíces

Existe un modo de encontrar las raíces de una función cuadrática de fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, como se muestra a continuación.

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$	Se extrae factor común a en la fórmula de $f(x)$.
$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$	Se iguala a 0 la expresión obtenida.
$\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$	Por ser $a\neq 0$.
$x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$	Se expresa el primer miembro de manera que contenga un trinomio cuadrado perfecto y se anota como tal.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$	Se despeja.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$	Se opera.
$\left\lvert x+\frac{b}{2a}\right\rvert=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros, si el miembro de la derecha es positivo.
$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ o $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Se aplica la definición de módulo.
$x_1=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $x_2=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	Se despeja x.

Como la raíz cuadrada es distributiva respecto del cociente, resulta que

$$\sqrt{\frac{b^2-4\,ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4\,ac}}{\sqrt{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|2a|}$$

Según cuál sea el signo de a, $|2a|$ puede ser igual a $2a$ o a $-2\,a$. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos se obtiene la misma fórmula para hallar las raíces:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Problema 14

Hallar los ceros, las coordenadas del vértice y trazar la gráfica de la función de fórmula $f(x) = 2x^2 - 4x - 16$.

Es posible calcular las raíces usando la fórmula anterior, teniendo en cuenta que, en este caso, $a = 2$, $b = -4$ y $c = -16$.

Por lo tanto, una de las raíces es $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-16)}}{2\cdot 2}=4$

La otra raíz es $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-16)}}{2\cdot 2}=-2$

Entonces, los ceros son $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$.

Para encontrar las raíces de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\,f(x)=ax^2+bx+c$, con $a\neq 0$, pueden utilizarse las fórmulas

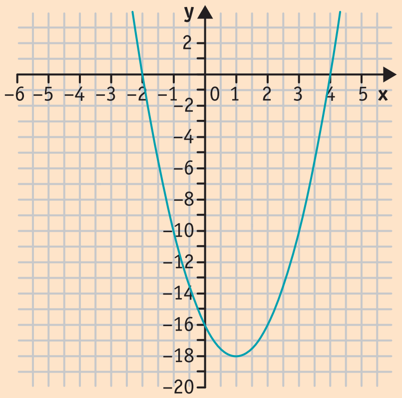
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El análisis de la expresión b^2-4ac que aparece en ellas permite discriminar la cantidad de raíces reales que tiene la función.

- $b^2-4\,ac=0$, una sola (el vértice).
- $b^2-4\,ac>0$, dos.
- $b^2-4\,ac<0$, ninguna.

Al conocer las raíces, es posible determinar el valor de la abscisa del vértice, $x_v = 1$, por ser el punto medio entre ambas. Luego se puede establecer el valor de y_v, que es la imagen de x_v.
Es decir, $y_v = f(x_v) = f(1) =$
$2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 - 16 = 2 - 4 - 16 = -18$.
Por lo tanto, el vértice está en el punto $(1 ; -18)$.
Con toda la información anterior, es posible hacer la gráfica.



También es posible, a partir de conocer sus raíces, reconstruir la fórmula de la función cuadrática.

Problema 15

Encontrar la fórmula de una función cuadrática $g(x)$ si su gráfica contiene los puntos $(4 ; 0)$, $(-2 ; 0)$ y $(0 ; -16)$.

Como la gráfica de $g(x)$ pasa por los puntos $(4 ; 0)$ y $(-2 ; 0)$ entonces sus raíces son $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$. Para que la función se anule en $x = 4$ y en $x = -2$, su fórmula debe contener el producto $(x - 4)(x + 2)$.

$(x-4)(x+2) = x^2 + 2x - 4x - 8$	Se aplica la propiedad distributiva.
$(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$	Se opera.

Se obtiene una función cuadrática cuyas raíces son las buscadas pero que no pasa por el punto $(0 ; -16)$. Para que esto ocurra puede considerarse $g(x) = a(x^2 - 2x - 8)$ y proceder de la siguiente forma:

$$g(x) = a(x^2 - 2x - 8)$$
$$-16 = g(0) = a(0^2 - 2 \cdot 0 - 8)$$
$$-16 = a(-8)$$
$$2 = a$$

La función buscada es entonces: $g(x) = 2(x^2 - 2x - 8) = 2x^2 - 4x - 16$

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, se verifica que $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde x_1 y x_2 son las raíces.
A esta manera de escribir la fórmula de una función cuadrática se la llama **forma factorizada**.

ACTIVIDADES

31. Encuentren la fórmula de una función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = 2$ y $x_2 = 5$. ¿Hay una única función?

32. ¿Es cierto que la función de fórmula $f(x) = x^2 + bx - 4$ tiene siempre dos raíces, para cualquier valor de b? ¿Por qué?

33. ¿Para qué valores de a la función de fórmula $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ no tiene raíces?

34. Encuentren el vértice y las raíces de las siguientes funciones y tracen sus gráficas:

$f(x) = 2x^2 + 12x - 14$ $g(x) = 2x^2 + 2x - 4$ $h(x) = 3x^2 - 24x + 45$

Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

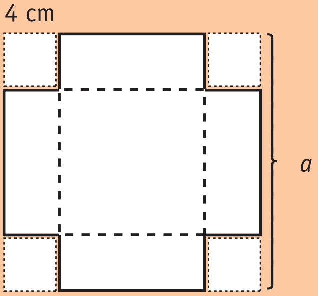
Una ecuación en la que el exponente mayor al que aparece elevada la variable es 2 y los demás exponentes son todos naturales se denomina *ecuación cuadrática* o *ecuación de segundo grado*.

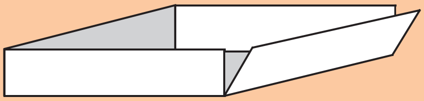
En algunas situaciones que pueden modelizarse mediante funciones cuadráticas resulta útil plantear y resolver ecuaciones cuadráticas, como en los casos siguientes.

Problema 16

Para construir una caja se recortan las cuatro esquinas de una plancha de cartón cuadrada, tal como se muestra en el dibujo. Cada recorte es un cuadrado de 4 cm de lado. Luego se pliegan los bordes hasta obtener la caja, sin tapa.

¿Cuánto debe medir el lado de la plancha de cartón para que la caja tenga un volumen de 33 856 cm^3?





Para resolver este problema, se puede suponer que el lado de la plancha cuadrada mide a (en cm). Por lo tanto, el área de la base de la caja medirá $(a - 8) \cdot (a - 8)$, pues a cada lado del cuadrado se le quitan dos cuadraditos de 4 cm de lado para armar la caja. Además, la altura de la caja será 4 cm, pues el pliegue se hace conservando el lado del cuadradito recortado.

De esta manera, el volumen (en cm^3) de la caja se puede escribir: $V = (a - 8)(a - 8) \cdot 4$. Es decir, el volumen depende de la longitud del lado de la plancha de cartón.

Por último, hay que hallar el valor de a para que el volumen sea 33 856 cm^3. Para eso, se puede plantear la ecuación $V(a) = 33\,856$, y resolverla de la siguiente manera.

$(a-8)(a-8)\cdot 4 = 33\,856$	Se reemplaza V(a) por la expresión hallada.
$(a-8)^2 = \dfrac{33\,856}{4}$	Se escribe el producto de factores iguales como el cuadrado de un binomio y se despeja.
$(a-8)^2 = 8464$	Se opera.
$\lvert a-8 \rvert = 92$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.
$a-8 = 92$ o $a-8=-92$	Se aplica la definición de módulo.
$a = 100$ o $\cancel{a=-84}$	Se desecha la solución negativa que no tiene sentido en el contexto del problema.

Por lo tanto, con una plancha de cartón de 100 cm de lado se puede armar una caja de 33 856 cm^3 de volumen.

Problema 17

El producto entre dos números enteros es 672 y el primero de ellos supera en 11 unidades al segundo. ¿Cuáles son esos números?

Para resolver este problema es conveniente escribir las relaciones establecidas de manera tal de poder operar con ellas, es decir, traducirlas a lenguaje simbólico. Así, como el enunciado habla de dos números que no son conocidos, es posible llamar a uno de ellos *x* y al otro, *y*. Luego se puede razonar de la siguiente manera.

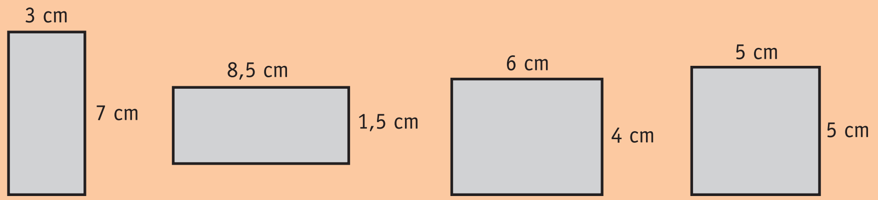
$y \cdot x = 672$	Se escribe en forma simbólica que el producto es 672.
$(x+11) \cdot x = 672$	Como el primer número supera en 11 al segundo, es decir, $y = x + 11$, se reemplaza y por su equivalente $x + 11$.
$x^2 + 11x = 672$	Se aplica la propiedad distributiva.
$x^2 + 11x - 672 = 0$	Se resta 672 en ambos miembros y se obtiene la expresión polinómica de una función cuadrática igualada a cero.
$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{11^2 - 4(-672)}}{2}$ $x_2 = \frac{-11 - \sqrt{11^2 - 4(-672)}}{2}$	Se aplica la fórmula que permite hallar las raíces de una función cuadrática definida en forma polinómica, sabiendo que $a = 1, b = 11$ y $c = -672$.
$x_1 = \frac{-11 + 53}{2} = 21$ $x_2 = \frac{-11 - 53}{2} = -32$	Se opera y se hallan las dos soluciones posibles.

Si se analiza la validez de las soluciones halladas, se puede establecer que para $x_1 = 21$, el otro número debe ser $y_1 = 32$, ya que $21 \cdot 32 = 672$ y $32 = 21 + 11$. De igual modo, para $x_2 = -32$, debe ser $y_2 = -21$, ya que $(-32) \cdot (-21) = 672$ y $(-21) = (-32) + 11$.

Es decir, hay dos pares de números que verifican las condiciones pedidas.

Problema 18

Con una soga de 20 cm de largo se pueden construir rectángulos, como, por ejemplo, los siguientes.



¿Cuál de todos los que pueden construirse es el que tendrá mayor área?

Según se plantea en este problema, los lados de los rectángulos no pueden medir cualquier valor, sino que la suma de las cuatro medidas debe ser 20 cm.

La suma de las medidas de dos lados consecutivos debe ser entonces 10 cm. Por lo tanto, una vez que se establece la medida de un lado, la medida del otro depende de la primera.

Si se denominan a y b a las medidas (en cm) de los lados del rectángulo, debe cumplirse: $a + b = 10$, de donde surge que $a = 10 - b$.

Como el área del rectángulo es $A = a \cdot b$, y $a = 10 - b$, entonces:

$$A = (10 - b) \cdot b$$

En este problema es indistinto expresar el área en función de la medida a o de la b. Es decir, se pueden utilizar tanto la expresión $A = (10 - b) \cdot b$ como $A = (10 - a) \cdot a$

En esta expresión, el área del rectángulo depende de la medida b del lado, por lo tanto, puede considerarse como la fórmula de una función cuadrática:

$$A(b) = (10 - b) \cdot b = 10b - b^2$$

Es posible reconocer en esta expresión que $b = 10$ o $b = 0$ son ceros de la función porque anulan el área y, por lo tanto, no pueden ser medidas de los lados. Tampoco es posible que b tome valores mayores que 10 porque no cumpliría las condiciones pedidas. Es decir, el valor de b deberá estar entre 0 y 10.

En cuanto a la gráfica de la función que representa el área, la parábola tiene sus ramas hacia abajo porque el coeficiente del término cuadrático es negativo, por lo tanto, su vértice corresponde al valor máximo que puede tomar el área.

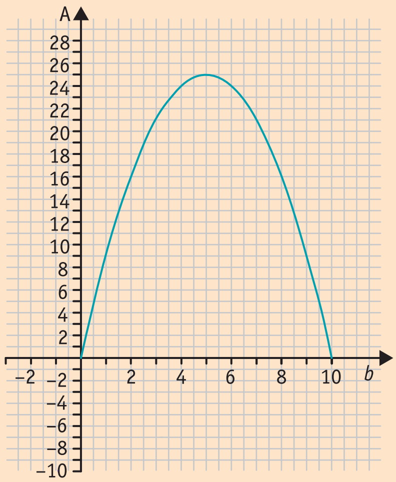
Como las raíces son 0 y 10, en el punto medio entre ambas está la abscisa del vértice, es decir, $x_v = 5$.

Con ese dato puede hallarse la ordenada del vértice: $y_v = A(5) = (10 - 5) \cdot 5 = 25$.

Por lo tanto, el vértice es el punto $V = (5 ; 25)$. Esto indica que el área máxima es 25 cm^2 y corresponde a un cuadrado de 5 cm de lado.

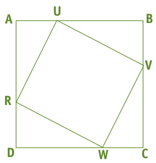
Gráficamente, es posible identificar que las coordenadas de cada punto de la gráfica están formadas por cada medida b posible para un lado (a partir de la cual se puede conocer el valor de la medida a del otro) y el área del rectángulo obtenido con esas medidas.

En este problema el domino de la función es el intervalo (0 ; 10) y la imagen (0 ; 25].



35. Si a un número se le suma su cuadrado, el resultado es 182. ¿De qué número se trata?

36. ABCD es un cuadrado de lado 10 cm y U, V, W y R son puntos ubicados a x cm de los vértices A, B, C y D, respectivamente.
Hallen el valor de x para el cual el área de UVWR es de 50 cm^2.



37. El área de un rectángulo es de 72 m^2 y su perímetro es de 34 m. Hallen su largo y ancho.

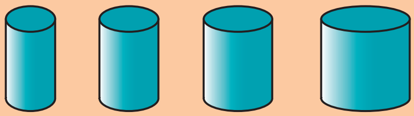
38. Un automovilista viaja 40 km a una velocidad de v km/h. Si reduce su velocidad en 2 km/h, tarda una hora más en hacer el mismo trayecto. ¿A qué velocidad viajaba?

Intersección entre una recta y una parábola

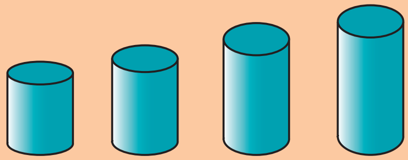
Para modelizar y resolver algunas situaciones como las siguientes, resulta útil determinar si existen puntos que pertenecen, simultáneamente, a una recta y a una parábola.

Problema 19

Una fábrica de pintura confecciona los envases cilíndricos para sus productos. Una de sus máquinas arma todos los envases con una altura de 0,4 m y puede variar la base circular, tal como muestran los dibujos.



Otra máquina arma todos los envases con la misma base circular de 0,25 m de radio, pero puede variar la altura, tal como se muestra en los dibujos siguientes:

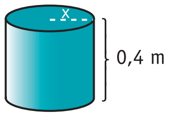


En cada caso, el radio de la base de los primeros cilindros coincide con la altura de los segundos.

a. ¿Cómo varía el volumen de los envases que arma cada máquina?

b. ¿Puede haber algún envase armado por la primera máquina de volumen y radio respectivamente iguales al volumen y la altura de algún envase armado por la segunda?

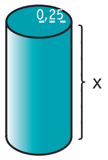
Como la primera máquina arma solo envases de 0,4 m de altura, el volumen de esos envases se puede calcular con la fórmula



$$V_1(x) = 0{,}4 \cdot \pi \cdot x^2$$

donde x es la medida del radio de la base (en m) y V_1 es el volumen (en m^3), que depende del radio. Esta fórmula representa una función cuadrática.

La segunda máquina, en cambio, mantiene fija la base de 0,25 m de radio y modifica la altura de los envases, por lo tanto, el volumen de esos envases puede calcularse mediante la fórmula:

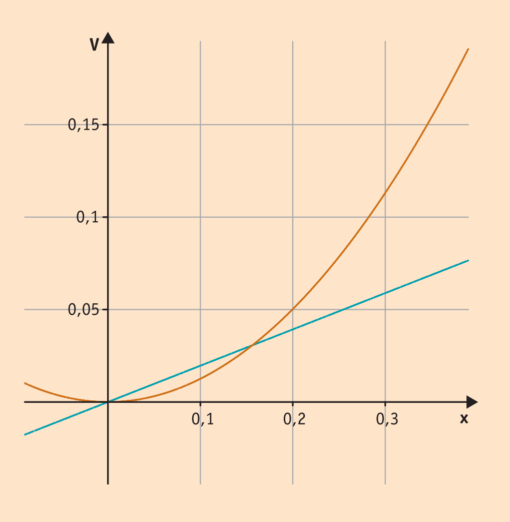


$$V_2(x) = (0{,}25)^2 \cdot \pi \cdot x$$

donde x representa la altura (en m) y V_2 es el volumen (en m^3), que depende de la altura. Esta fórmula representa una función lineal.

Como el radio de la base de los primeros cilindros coincide con la altura de los segundos, el valor de x en ambas fórmulas coincide y entonces pueden graficarse en un mismo sistema de ejes cartesianos.

En esta gráfica se ha considerado el máximo dominio en el que pueden definirse las funciones, es decir, $\mathbb{R}$. Sin embargo, conviene tener presente que para la situación planteada solo tiene sentido considerar como dominio a los números reales positivos, ya que se trata de longitudes.



A partir de las fórmulas y de las gráficas, es posible reconocer que, a medida que aumenta el valor de x, el volumen de los envases aumenta mucho más rápidamente en el primer caso que en el segundo.

Para saber si existe algún valor de x para el cual un envase armado por la primera máquina tenga el mismo volumen que uno armado por la segunda, se pueden observar los puntos de intersección de la recta con la parábola.

Uno de ellos corresponde a $x = 0$, para el cual no existen envases.

Resulta difícil determinar exactamente las coordenadas del otro punto a partir de la gráfica solamente, por lo tanto, es conveniente buscar los valores de x para los cuales las funciones son iguales. Para eso, a partir de la expresión $V_1(x) = V_2(x)$, se puede proceder de la siguiente manera.

$0{,}4 \cdot \pi \cdot x^2 = (0{,}25)^2 \cdot \pi \cdot x$	Se reemplaza por las fórmulas de las funciones.
$0{,}4 \cdot \pi \cdot x^2 - (0{,}25)^2 \cdot \pi \cdot x = 0$	Se aplican propiedades de las operaciones que permiten anular el segundo miembro.
$x \cdot \pi\,(0{,}4 \cdot x - 0{,}0625) = 0$	Se saca factor común $x \cdot \pi$ y se opera.
$0{,}4 \cdot x - 0{,}0625 = 0$	Como $x \neq 0$, debe ser cero el otro factor.
$x = 0{,}0625 : 0{,}4 = 0{,}15625$	Se despeja y se resuelve.

Cuando se buscan los puntos de intersección entre una recta y una parábola, resulta conveniente igualar las fórmulas de las funciones que representan y hallar los valores de x que son solución de la ecuación obtenida.
Reemplazando esos valores en una de las dos fórmulas, se calculan los valores correspondientes de y que determinan las coordenadas de los puntos de intersección buscados.

La solución obtenida significa que, para un radio de aproximadamente 0,156, un envase armado por la primera máquina tiene, aproximadamente, el mismo volumen que uno armado por la segunda máquina con una altura de esa medida.

Si se reemplaza el valor de x obtenido en cada una de las fórmulas de los volúmenes, se obtienen resultados muy próximos.

$$V_1(0{,}156) = 0{,}4 \cdot \pi \cdot (0{,}156)^2 \approx 0{,}03\ldots$$

$$V_2(0{,}156) = (0{,}25)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}156 \approx 0{,}03\ldots$$

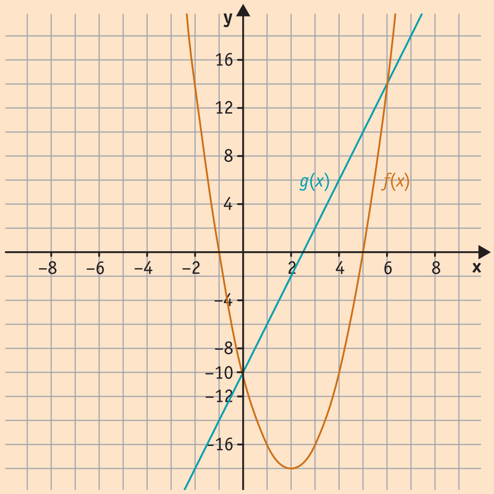
Problema 20

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por la fórmula $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por la fórmula $g(x) = 4x - 10$. ¿Cuál o cuáles son los puntos de intersección de las gráficas de ambas funciones?

Si se trazan ambas gráficas en un mismo par de ejes, es posible reconocer por sus fórmulas que la gráfica de la función f es una parábola y la de g, una recta.

En el gráfico se observa que las gráficas se intersecan en dos puntos.

Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección hay que resolver la ecuación $f(x) = g(x)$.



Para resolver esta ecuación hay varias posibilidades. Una de ellas es la siguiente.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 8x - 10 = 4x - 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } x = 6$$

Para calcular las ordenadas de los puntos de intersección se calculan las imágenes de los valores de x hallados, a través de f o de g: $g(0) = -10$ y $g(6) = 14$.

Los puntos de intersección son entonces $(0 ; -10)$ y $(6 ; 14)$.

Si se analiza la fórmula de cada función, también se puede obtener en este caso uno de esos pares ordenados, sin resolver ninguna ecuación. En efecto, en $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$ se observa que la ordenada al origen es -10, y lo mismo ocurre en $g(x) = 4x - 10$. Por lo tanto, ése es el punto de intersección de ambas gráficas con el eje de ordenadas y entre sí.

Problema 21

¿Cuáles son los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones definidas por las fórmulas $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$ y $g(x) = -3x + 4$?

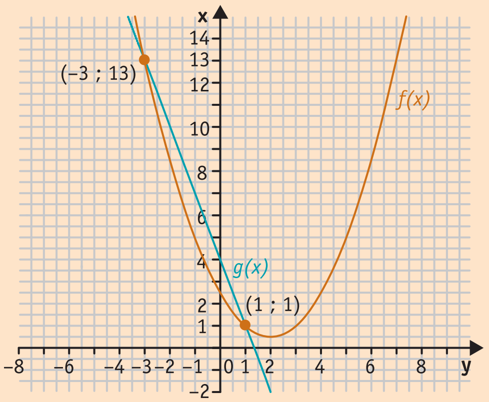
Para encontrar los puntos de intersección, como en los casos anteriores, es conveniente resolver la siguiente ecuación $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} = -3x + 4$. Para eso, se puede proceder así:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2} + 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 3}}{1} = 1 \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 3}}{1} = -3.$$

Luego: $x_1 = 1$ y $g(1) = 1$ o $x_2 = -3$ y $g(-3) = 13$.

En consecuencia, los puntos de intersección de ambas gráficas son (1 ; 1) y (–3 ; 13), como puede verificarse trazando ambas gráficas en un mismo par de ejes.

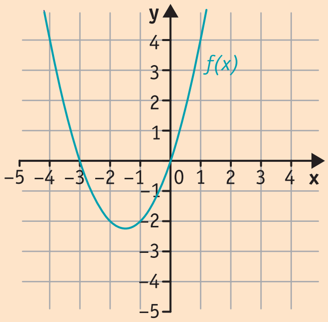


Problema 22

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por la fórmula $f(x) = x^2 + 3x$. ¿Existe una recta que no tenga ningún punto en común con la parábola que representa la función f? ¿Cuál es la fórmula de la función lineal que determina dicha recta?

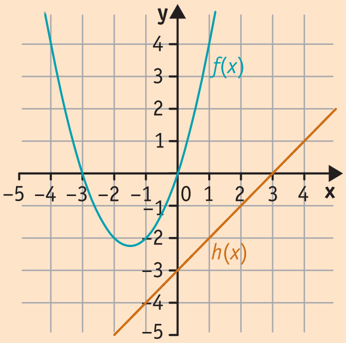
Para responder las preguntas anteriores es conveniente trazar la gráfica de f.

La observación del gráfico cartesiano permite advertir la posibilidad de trazar infinitas rectas que no tengan ningún punto en común con la parábola.



Una de esas rectas puede ser, por ejemplo, la recta naranja que aparece en el gráfico siguiente.

A partir de la ordenada al origen y la pendiente, puede determinarse que la recta corresponde a la función lineal de fórmula $h(x) = x - 3$.

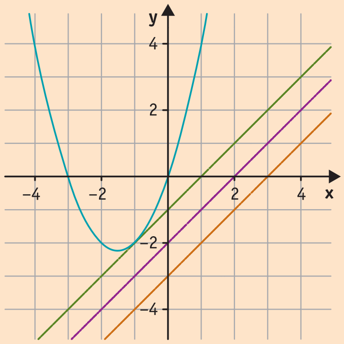


Para verificar que la fórmula anterior es correcta, se puede razonar de la siguiente manera.

$x^2+3x=x-3$	Se igualan las fórmulas de ambas funciones para obtener los puntos de intersección.
$x^2+2x+3=0$	Se transforma en otra expresión equivalente, con segundo miembro nulo.
$x_1=\dfrac{-2+\sqrt{4-12}}{2}$ $x_2=\dfrac{-2-\sqrt{4-12}}{2}$	Al intentar resolver la ecuación obtenida, surge la imposibilidad de calcular $\sqrt{-8}$ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución y no hay puntos de intersección entre la recta y la parábola.

Si se desplaza la recta $h(x) = x - 3$ hacia la izquierda, como se muestra en el siguiente gráfico, es posible encontrar una recta que tenga un único punto en común con la parábola.

La recta verde interseca en un único punto a la parábola, se dice entonces que la recta es tangente a la parábola.
A partir de la pendiente y la raíz, puede determinarse que esa recta corresponde a la función lineal de fórmula $t(x) = x - 1$.



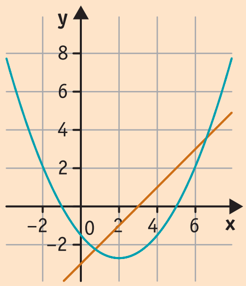
Para encontrar las coordenadas del punto de intersección entre la parábola y la recta verde se pueden igualar las fórmulas de ambas funciones y proceder como en casos anteriores.

$$x^2 + 3x = x - 1 \iff x^2 + 2x + 1 = 0$$

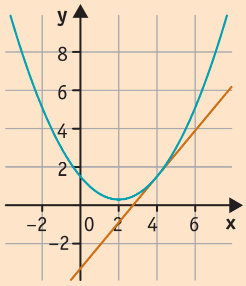
$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \qquad \text{o} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2-0}{2} = -1$$

$t(x_1) = t(x_2) = -2 \quad \Rightarrow \quad (-1\ ;\ -2)$ es el único punto de intersección entre las gráficas.

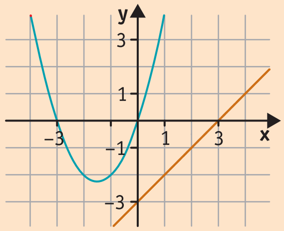
Cuando se buscan intersecciones entre una recta y una parábola pueden presentarse, entonces, los siguientes casos.



Hay dos puntos de intersección.



Hay un solo punto de intersección.



No hay ningún punto de intersección.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

39. En un corralón de materiales se venden baldosas cuadradas a $12 el m^2 y cobran $14 por enviar el pedido en un flete.

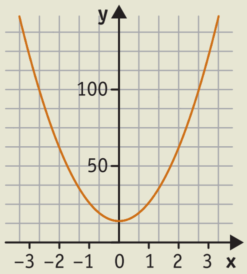
a. ¿Cuánto cuesta comprar la cantidad de baldosas suficiente para embaldosar un patio cuadrado de 3 m de lado, incluyendo el traslado?

b. ¿Cuánto cuesta comprar la cantidad de baldosas suficiente para embaldosar un patio de 7 m de lado, incluyendo el flete?

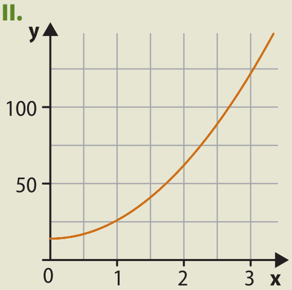
c. ¿Cuál es la fórmula que permite determinar el costo de una compra de baldosas, en función de la medida del lado del patio cuadrado a embaldosar, incluyendo el flete?

d. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor la situación? ¿Por qué?

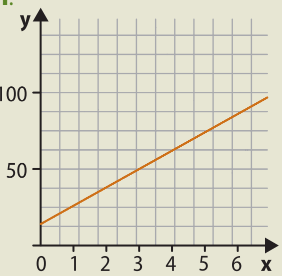
I.



II.



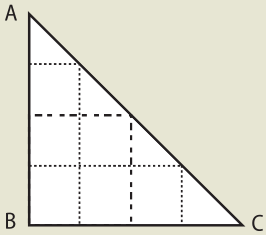
III.



40. Escriban la fórmula de una función cuadrática con vértice en el punto (–3 ; 2). ¿La respuesta es única? ¿Por qué?

41. En un triángulo rectánguloABC, los lados AB y BC son iguales y miden 7 cm. Se dibujan rectángulos inscriptos, tal como se muestra en la figura.

Entre todos los rectángulos inscriptos que se pueden dibujar, ¿cuál es el que tiene mayor área? ¿Cuál es el que tiene menor área?

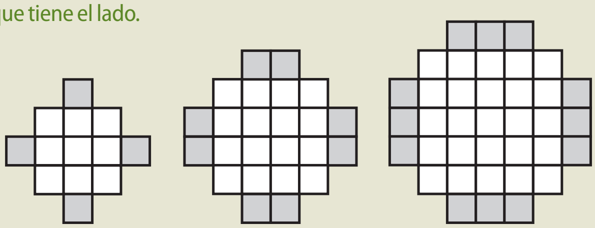


42. Representen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$.

$g(x) = x^2 - 5$ $\quad h(x) = (x + 7)^2$ $\quad j(x) = (x + 1)^2 - 4$ $\quad k(x) = (x - 1)^2 - 5$

43. Para armar el cerco de un terreno rectangular se consiguieron 46 m de alambre. ¿Cuál es la mayor área que puede cercarse con él?

44. Las siguientes figuras se generaron a partir de cuadrados pequeños dispuestos, a su vez, en forma de cuadrado, a los que se le agregaron, en cada lado, cuadrados pequeños, dos menos que los que tiene el lado.



$n = 1$ $\quad n = 2$ $\quad n = 3$

a. Si con n se designa la cantidad de cuadrados pequeños que se agregan en cada lado al cuadrado central, ¿cuáles de las siguientes fórmulas permite contar la cantidad total de cuadraditos, en función de los que conforman un lado del cuadrado central?

$f_1(n) = n^2 + (n - 2)$ $\quad f_2(n) = n^2 + 4n$ $\quad f_3(n) = (n + 2)^2 + 4n$

$f_4(n) = (n + 2)^2 + n$ $\quad f_5(n) = n^2 + 8n + 4$

b. ¿Para qué valor de n, el dibujo tendrá 472 cuadraditos? ¿Y 875?

45. Encuentren al menos dos funciones cuadráticas cuyas raíces sean 3 y –7. ¿Cuántas hay? ¿Por qué?

46. En un rectángulo de 444 m^2 de área, uno de los lados mide 25 cm más que el otro. ¿Cuál es la medida de cada lado?

47. Una función cuadrática está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + bx + 9$$

Determinen para qué valores de b la función tiene una sola raíz. ¿Y dos raíces? ¿Y ninguna?

48. Propongan la fórmula de una función cuadrática cuya gráfica contenga a los puntos (12 ; 0) y (–4 ; 0). ¿La respuesta es única? ¿Por qué?

49. La gráfica de una función cuadrática contiene a los puntos (0 ; 5), (–5 ; 7) y (18 ; 7). ¿Es suficiente esta información para conocer las coordenadas de su vértice? ¿Por qué?

50. Indiquen la fórmula de una función cuadrática que tiene raíces $x_1 = -2$ y $x_2 = 6$ y su vértice es el punto (2 ; –5).

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

51. ¿Es cierto que las funciones $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = -5x^2 - 5x + 30$ tienen el mismo eje de simetría? ¿Por qué?

52. Un contador determina que las ganancias de uno de sus clientes se calculan mediante la siguiente fórmula: $F(x) = x\,(x - 8)$, donde x representa la cantidad de artículos vendidos.
Para otro cliente, determina que su ganancia puede establecerse por la siguiente fórmula: $G(x) = 2x + 11$, donde x también representa la cantidad de artículos que vende.

¿Existe una cantidad de artículos vendidos para la cuál ambos clientes obtengan la misma ganancia? ¿Por qué?

53. Encuentren la fórmula de una función cuadrática cuya gráfica tenga el mismo vértice que $f(x) = -2(x + 4)^2 - 3$ y que contenga al punto $(0 ; 1)$.

54. Hallen la fórmula de una función lineal cuya gráfica contenga el vértice y una de las raíces de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

55. Las siguientes fórmulas corresponden a funciones definidas en $\mathbb{R}$.
$h(x) = (x + 1)^2$ $\quad g(x) = x^2 + 1$ $\quad t(x) = x^2 + 8x + 11$
a. Encuentren sus raíces, las coordenadas del vértice de cada una y grafíquenlas.
b. Hallen los puntos de intersección entre la gráfica de cada una de ellas y la gráfica de $f(x) = -2x + 1$. Verifiquen sus respuestas gráficamente.

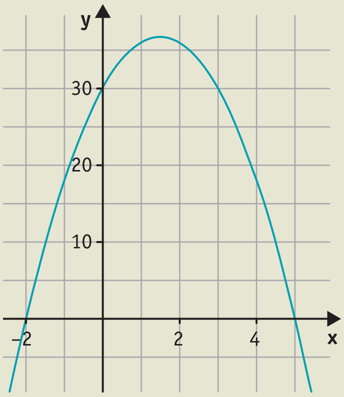
56. Al patear una pelota, la altura del balón con respecto al suelo varía en función del tiempo, según la siguiente fórmula: $h(t) = -t^2 + 10t$, donde t indica el tiempo que transcurre (en segundos) y h representa la altura en metros.
a. ¿En qué momento la pelota alcanza su máxima altura? ¿Cuál es dicha altura?
b. ¿Al cabo de cuánto tiempo vuelve a tocar el suelo?

57. Los puntos $(1 ; 0)$ y $(0 ; 1)$, ¿pertenecen a la gráfica de $f(x) = x^2 - 5x + 1$? ¿Por qué?

58. Si $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ y $g(x) = x + k$ encuentren algún valor para k de modo tal que se cumpla la condición pedida, en cada uno de los siguientes casos.
a. la gráfica de g interseca en un único punto a la de f.
b. la gráfica de g interseca en dos puntos a la de f.
c. la gráfica de g no interseca a la de f.

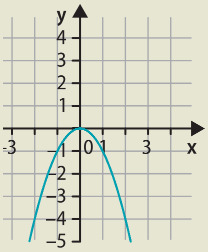
59. Encuentren al menos dos funciones cuadráticas que pasen por los puntos $(3 ; 7)$ y $(-3 ; 7)$. Indiquen el vértice de cada una de ellas.

60. Si $f(x) = a\,(x - 5)\,(x + 2)$, encuentren un valor para a de modo tal que la función tenga la siguiente gráfica.

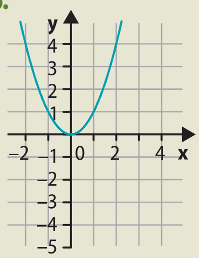


61. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa el área de un cuadrado, en función de la medida del lado?

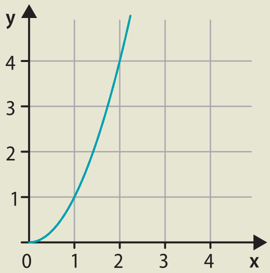
a.



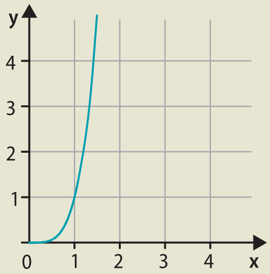
b.



c.



d.



62. Determinen los ceros, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los conjuntos de positividad y de negatividad y el vértice de $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{3}{8}$.

63. Se sabe que la función $f(x)$ es cuadrática. Su vértice es el punto de intersección entre las rectas de ecuación $y = 4x + 8$ y $5x + y = -1$. Una de sus raíces coincide con la raíz de la recta de ecuación $y = x + 3$.
a. Encuentren la fórmula de f.
b. Hallen los ceros, los intervalos de positividad y negatividad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el vértice, la imagen y el gráfico de $f(x)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Un analista financiero que asesora a una fábrica determinó que las ganancias (en miles de $) se relacionan con el precio de los productos (en cientos de $) según la siguiente fórmula:

$$g(x) = -2x^2 + 120x - 1000$$

A. ¿Cuál o cuáles de los siguientes precios les permite obtener ganancias mayores?

a $ 30 **b** $ 10

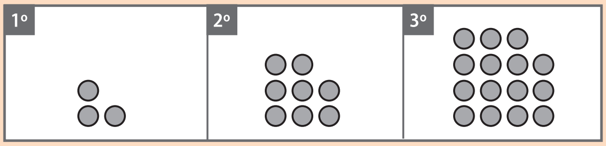
c $ 50 **d** –$ 30

B. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones corresponde a la ganancia máxima?

a g(10) **b** g(30)

c g(50) **d** g(–30)

2. La siguiente serie de dibujos está integrada por circulitos dispuestos en forma de cuadrado incompleto.



¿Cuál o cuáles de las siguientes fórmulas permite obtener la cantidad de circulitos que se encuentran en el lugar n de la serie?

a $n^2 - 1$ **b** $(n - 1)^2$

c $(n + 1)^2 - 1$ **d** $n^2 + 2n$

3. Si $f(x) = -3x^2 + 3x + 6$, las raíces de f son:

a $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ **b** $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

c $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ **d** $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

4. Un corralón de materiales cobra $ 27 el m^2 de cerámicas de piso. El traslado de materiales tiene un costo de $ 10. Si un arquitecto tiene que diseñar patios rectangulares cuyo largo sea 1 m más que el ancho, ¿cuáles de las siguientes fórmulas modelizan el costo de la cerámica?

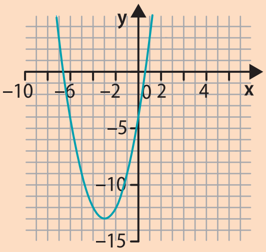
a $f(x) = 27x^2 + 27x$ **b** $f(x) = 10x^2 + 10x$

c $f(x) = 27x^2 + 27x + 10$ **d** $f(x) = 10x^2 + 10x + 27$

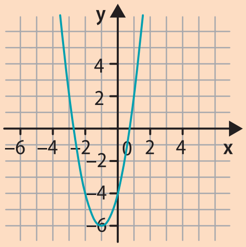
e $f(x) = 27x\,(x + 1) + 10$ **f** Ninguna de las anteriores.

5. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponden a $g(x) = 4x^2 + 6x - 4$?

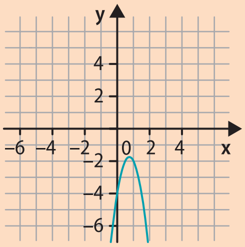
a



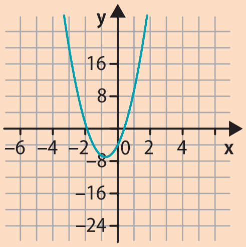
b



c

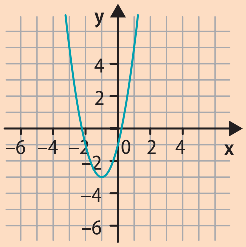


d

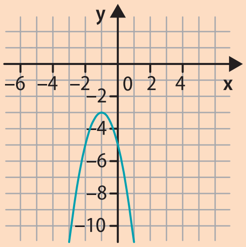


6. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a $h(x) = -(x + 2)^2 - 3$?

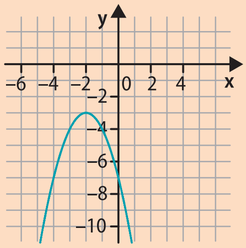
a



b



c



d