CONTENIDOS
- Sistemas de medición de ángulos
- Las relaciones trigonométricas
- Las funciones seno y coseno
- La función tangente
- Ecuaciones e identidades trigonométricas

Existen muchos fenómenos naturales o bien procesos que se repiten con una cierta frecuencia, más o menos cíclica, como los latidos del corazón, el día y la noche, la respiración, las ondas electromagnéticas, las microondas, los rayos X, las transmisiones de radio y televisión, el sonido. Para modelizar estas situaciones se utilizan funciones conocidas con el nombre de funciones trigonométricas.

5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

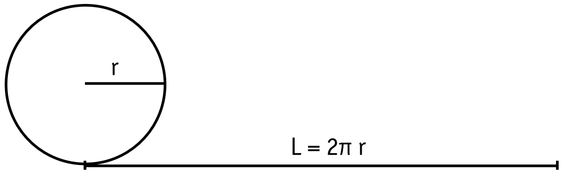
Problema 1

Trazar varias circunferencias. Bordear con un hilo las circunferencias trazadas y medir el perímetro de cada una.

a. ¿Cuántas veces entra el radio de cada circunferencia en su perímetro?

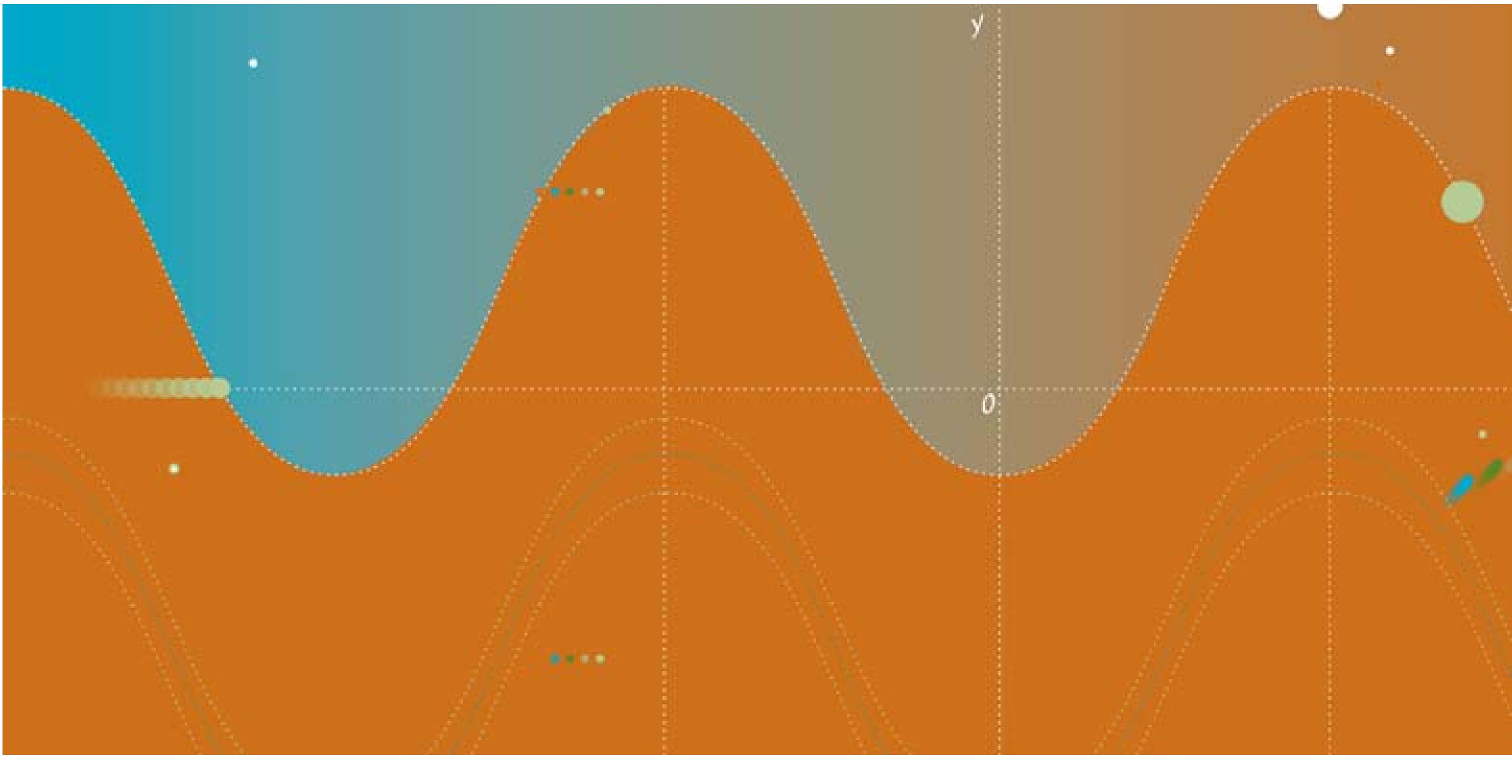
b. ¿Cuántas veces entra el radio de la circunferencia en media circunferencia?

Si se realiza la experiencia varias veces



se puede observar que sin importar el tamaño de la circunferencia, el diámetro, 2r, entra 3 veces y un poquito más en su perímetro.

¿Será posible entonces dividir el perímetro de una circunferencia por su diámetro y obtener el número que exprese esa división?



De la experiencia anterior se puede deducir que la división entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia es 3 coma "algo" porque el diámetro entra 3 veces enteras y un poco más en el perímetro.

Este cálculo fue una preocupación desde la antigüedad. Los matemáticos sabían que existía una relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro, aunque no podían establecerla con claridad.

Cuando intentaron encontrar la relación y escribirla como una fracción pudieron probar que no existe un número racional que la determine por lo que ésta relación es un número irracional al que llamaron π (pi).

A partir de la relación anterior también es posible afirmar que el cociente entre el perímetro y el radio, que es la mitad del diámetro, es el doble de π, o sea:

$$\frac{\textit{Perímetro de la circunferencia}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = 2\pi$$

Es decir el radio entra 2π veces en el perímetro de la circunferencia.

Si se toma la mitad de la circunferencia se está tomando la mitad de su perímetro, por lo tanto el radio entrará la mitad de veces que entra en el perímetro completo. Entonces el radio entra π veces en el perímetro de media circunferencia, o sea:

$$\frac{\textit{Perímetro de media cicunferencia}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = \pi$$

El número π es la relación que existe entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, simbólicamente:

$$\pi = \frac{\textit{Perímetro de la circunferencia}}{\textit{Diámetro de la circunferencia}}$$

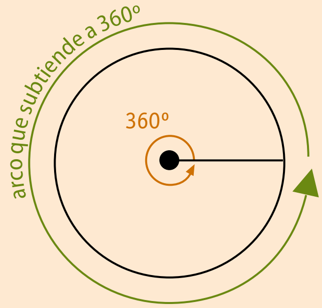
Esta relación se mantiene constante para cualquier circunferencia.

Problema 2

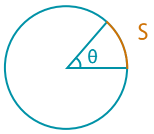
a. ¿Cuántas veces entra el radio de la circunferencia en el arco generado por el ángulo de 360°, el de 180°, el de 90° y el de 270°?

b. Encontrar la relación existente entre cualquier ángulo central y el arco generado por ese ángulo.

Como 360° es un giro completo, el arco generado por él, es decir, el arco que subtiende a él, es igual a toda la circunferencia. Dado que el radio de la circunferencia entra 2π veces en el perímetro, entonces entra 2π veces en el arco generado por un ángulo de 360°.



Si en una circunferencia se toma un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia, ese ángulo se llama **ángulo central** y la longitud de la circunferencia que queda determinada por los lados del ángulo se llama **arco de la circunferencia que subtiende ese ángulo.**



En este caso, S es el arco que subtiende al ángulo central θ.

El ángulo de 180° es media vuelta; el arco generado por él es igual a media circunferencia. Por lo tanto el radio de la circunferencia entra π veces en él.

El ángulo de 90° equivale a un cuarto de de circunferencia. El radio entra $\frac{\pi}{2}$ veces en el arco generado por él.

Como 270° corresponde a tres cuartos de circunferencia, si en cada cuarto el radio entra $\frac{\pi}{2}$ veces, entonces en tres cuartos entra $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ veces, es decir $\frac{3}{2}\pi$.

Se puede decir entonces que:

$$\frac{\textit{Longitud del arco que subtiende a un ángulo de 270°}}{\textit{Radio de la circunferencia}} = \frac{3}{2}\pi$$

La relación entre la cantidad de veces que entra el radio de una circunferencia en el arco que subtiende un ángulo de 270° es siempre $\frac{3}{2}\pi$, entonces es posible relacionar al ángulo de 270° con el valor $\frac{3}{2}\pi$ que es un valor constante para ese ángulo central en cualquier circunferencia.

Si se considera, por ejemplo, un ángulo central de 30°; éste entra 12 veces en el ángulo central de 360° pues $30° \cdot 12 = 360°$. Entonces, el arco que subtiende al ángulo de 360° equivale a 12 veces el ángulo que subtiende al arco de 30°. Por lo tanto:

$$2\pi = \frac{\text{Arco de ángulo central de } 360°}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{12 \cdot \text{Arco de ángulo central de } 30°}{\text{Radio de la circunferencia}}$$

Si x es un ángulo central cualquiera, la relación que existe entre el arco que subtiende a x y el radio de la circunferencia es:

$$\frac{\text{Arco de ángulo central } x}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{x}{180} \cdot \pi$$

Luego:

$$\frac{\text{Arco de ángulo central de } 30°}{\text{Radio de la circunferencia}} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Y nuevamente no importa cuál es la circunferencia que se toma, siempre es posible relacionar al ángulo de 30° con el valor $\frac{\pi}{6}$.

De forma análoga puede calcularse la relación entre un ángulo central cualquiera y el arco que subtiende.

Sistemas de medición de ángulos

Las unidades con las que hasta ahora se midieron los ángulos son los grados, minutos y segundos. Este sistema de medición se llama **sistema sexagesimal**. Se basa en dividir al ángulo de un giro en 360 partes iguales y cada una de esas partes es la unidad que corresponde a 1°.

Por lo tanto, el ángulo que sirve como la unidad es $\frac{1}{360}$ parte de un giro y ese es el ángulo que mide 1°.

También es posible elegir como medida de un ángulo la longitud del arco que lo subtiende; pero, la longitud de un arco que subtiende un ángulo varía con la circunferencia pues si la circunferencia tiene mayor radio, el arco es mayor.

Es necesario buscar una forma de medir los ángulos que no dependa de la circunferencia que se tome.

Para ello se puede relacionar cada ángulo con una cantidad que es el resultado de hacer el cociente entre el arco de circunferencia que subtiende y el radio de la circunferencia, dado que esa cantidad no cambia según la circunferencia sino que se mantiene constante para cada ángulo.

Por lo tanto, bastará con relacionar cada ángulo con el arco de circunferencia que subtiende el ángulo dividido el radio *r*.

Es decir, se puede medir un ángulo con la medida de la longitud del arco de circunferencia que subtiende al ángulo tomando como unidad de medida el radio de la circunferencia.

Este sistema de medición de ángulos a través del arco que subtienden en la circunferencia, se conoce con el nombre de sistema circular y su unidad de medida es el *radián*.

Esta medición, como se vio anteriormente, es independiente del valor del radio de la circunferencia.

De este modo, un ángulo de 360° equivale a 2π radianes.

La relación entre los grados de un ángulo y los radianes que miden el arco de circunferencia que recorre es una relación de *proporcionalidad directa*, por lo tanto, si 360° *equivale* a 2π radianes y un ángulo de A° *equivale* a B radianes, se tiene que:

$$\frac{360^\circ}{A^\circ} = \frac{2\pi\ rad}{B\ rad}$$

De este modo se tiene:

Ángulo medido en grados	360°	180°	90°	270°	30°
Ángulo medido en radianes	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{\pi}{6}$

El sistema que mide ángulos a través del arco que subtiende en la circunferencia se conoce con el nombre de **sistema circular** y su unidad de medida es el **radián**.
La ventaja de usar este sistema de medida es que permite trabajar con números reales, su operatoria y sus propiedades, haciendo más sencillos los cálculos.

ACTIVIDADES

1. ¿Cuál es la relación entre el arco que subtiende el ángulo de 60° y el radio de la circunferencia? ¿Y el de 45°?

2. ¿A cuántos radianes equivalen los ángulos de 240°, 12° y 36°?

3. ¿A cuántos grados equivale 1 radián?

4. Calculen a cuántos radianes equivalen los siguientes ángulos medidos en grados:

a. 125° **b.** 278° **c.** 15° **d.** 0° **e.** 485° **f.** 375°

5. Calculen a cuántos grados equivalen los siguientes ángulos medidos en radianes:

a. $\frac{5}{2}\pi$ **b.** 3π **c.** $\frac{5}{4}\pi$ **d.** $\frac{13}{6}\pi$ **e.** 54 **f.** 3,7

Las relaciones trigonométricas

En el capítulo anterior se analizaron las relaciones trigonométricas de ángulos agudos. Se extenderá, ahora, esta definición.

Problema 3

¿Cómo se calculan el seno y el coseno de ángulos mayores que 90°?

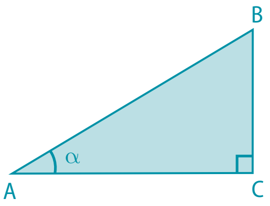
Para calcular las razones trigonométricas de ángulos menores que 90°, es posible construir un triángulo rectángulo donde la hipotenusa mida 1. En ese caso:

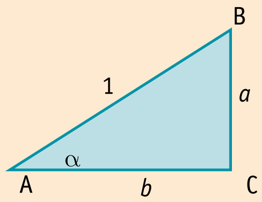
Dado el triángulo rectángulo ABC, si se llama α a uno de sus ángulos agudos, resultan las siguientes razones trigonométricas para todo ángulo α con $0° < \alpha < 90°$:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

Como el seno y el coseno de un ángulo son el resultado de un cociente de longitudes no tienen unidades y resultan ser números reales positivos. Además son menores que 1, dado que la hipotenusa es siempre mayor que los catetos.

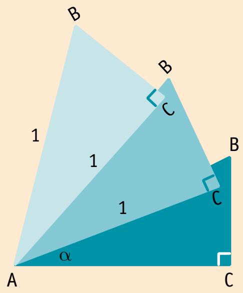




$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = a$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = b$$

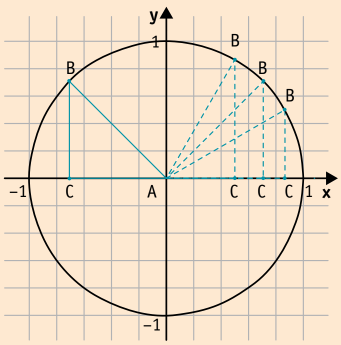
Si se hace girar el lado AB con centro en el punto A es posible construir todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 para valores de α entre 0° y 90° siempre midiendo el ángulo α desde AC.



Si se continúa rotando el lado AB se comienzan a obtener ángulos mayores a 90°. El lado AB determina, de este modo, una circunferencia con centro en A y radio 1. Todos los puntos de la circunferencia quedan determinados al girar el punto B. Esa circunferencia se puede representar utilizando los ejes coordenados.

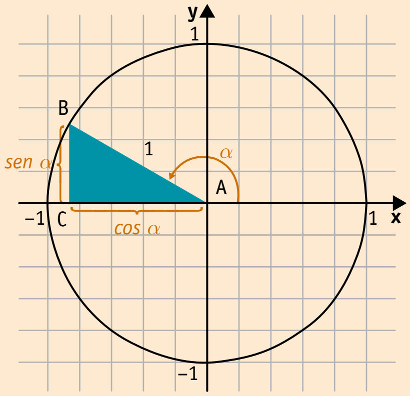
Tomando el punto A como la intersección de los ejes, es decir el punto (0 ; 0), se tiene una circunferencia de radio 1 con centro (0 ; 0) que pasa por los puntos (1 ; 0); (0 ; 1); (–1 ; 0) y (0; –1). El punto B determina cada punto la circunferencia.

En el primer cuadrante de esta circunferencia quedan marcados todos los triángulos rectángulos con hipotenusa igual a 1 donde B = (b ; a) con a y b números reales positivos.

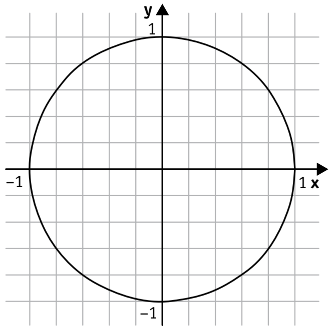


De este modo, para un valor de α (ángulo comprendido entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$) existe un único triángulo rectángulo con hipotenusa igual a 1 que está representado en el primer cuadrante de esta circunferencia. Ese triángulo rectángulo determina con su vértice B un único punto del plano sobre la circunferencia con coordenadas (b ; a). Además se verifica que: $\operatorname{sen} \alpha = a$ y $\cos \alpha = b$.

Si se continúa girando el lado AB, se pasa hacia el segundo cuadrante, donde ahora el ángulo α resulta ser mayor que 90°.
Para estos ángulos es posible extender la relación anterior, es decir, el seno de ese ángulo mayor a 90° resulta ser el valor que toma la coordenada del eje *y* para el punto B de la circunferencia y el coseno de ese ángulo es el valor que toma la coordenada del eje *x* del punto B.



A la circunferencia de radio 1 y centro (0 ; 0) se la llama **circunferencia trigonométrica**.

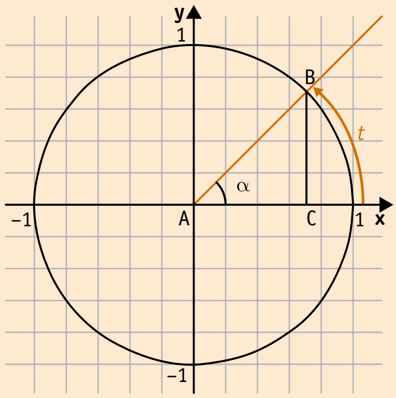


Como en la circunferencia es posible medir cualquier ángulo, se definen las razones trigonométricas para un ángulo α cualquiera de la siguiente manera:

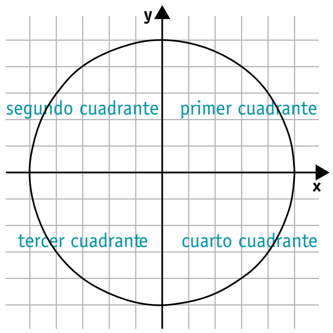
- Se marcan el ángulo α y el radio correspondiente a él en la circunferencia.
- Se determina el punto B = (*x* ; *y*), como la intersección del radio dibujado y la circunferencia.
- Se define sen α = y ; cos α = x

Los ángulos pueden medirse en grados y en radianes. Si bien lo que importa es la distancia que recorre el ángulo sobre la circunferencia, para evitar confusiones, se comienza a medir los ángulos desde el punto (1 ; 0) y en sentido antihorario.

En la circunferencia trigonométrica, como el radio es igual a 1, cuando el arco $\widehat{t}$ también mide 1, el ángulo mide un radian y en ese caso, la medida de un ángulo en radianes es *exactamente* el valor de la longitud del arco recorrido.
De este modo es equivalente medir a α **en grados** o medirlo como ***t* radianes.**



La circunferencia trigonométrica queda dividida por los ejes coordenados en 4 sectores, cada uno de los cuales se llama cuadrante. Los cuadrantes se cuentan en sentido contrario a las agujas del reloj.



Al establecer que el seno y el coseno de un ángulo resultan ser las coordenadas *x* e *y*, la ubicación de éstas coordenadas condicionará el signo del seno y del coseno.
De esta manera:

Cuadrante	Signo del seno	Signo del coseno
Primero	+	+
Segundo	+	–
Tercero	–	–
Cuarto	–	+

Cálculo de senos y cosenos con calculadora

Problema 4

a. ¿Cuál es el valor del seno del ángulo que mide 37°? ¿Cuánto mide en radianes un ángulo de 37°? ¿Cuál es el valor del seno del ángulo medido en radianes?

b. ¿Cuáles son los valores de los ángulos, medidos en radianes, que se encuentran entre 0 y 2π, cuyo seno es igual a 0,9?

Para calcular el seno de 37°, en una calculadora científica, basta con apretar:

sin 37 = o 37 sin =

según el modelo de calculadora que se posea. En ambos casos, aparecerá en el visor el número 0,601815023, es decir, sen 37° = 0,601815023.

Para averiguar la medida del ángulo de 37° en radianes, se puede construir una tabla de proporcionalidad como la siguiente:

$\cdot \frac{37}{180}$

Medida en grados	180°	37°
Medida en radianes	π	$\frac{37}{180}\pi \approx 0{,}645771823$

$\cdot \frac{37}{180}$

Si en el visor de la calculadora figura la sigla **RAD** o la letra **R** significa que se están tomando los ángulos medidos en radianes.
Si en cambio, en el visor de la calculadora aparece la sigla **DEG** o la letra **D** significa que se están midiendo los ángulos en grados sexagesimales.

En las calculadoras científicas pueden calcularse también la medida de senos y cosenos de ángulos medidos en radianes. Para poder hacerlo, la calculadora debe estar en modo RAD o R, no como hasta ahora que estaba en modo DEG o D (degree).

Una vez que está en el modo correcto hay que apretar sin 0,645771823 = o 0,645771823 sin = según el modelo de calculadora. En ambos casos en el visor aparecerá: 0,601815023, que es el valor de sen 0,645771823.

Si se traduce el problema **b.** a lenguaje simbólico, puede decirse que se intenta buscar valores de α tales que: sen $\alpha = 0{,}9$.

Para calcularlo con la calculadora científica será necesario tener la calculadora en modo RAD y teclear

2NDF o INV o SHIFT y sin y 0,9

O bien, en otro tipo de calculadora

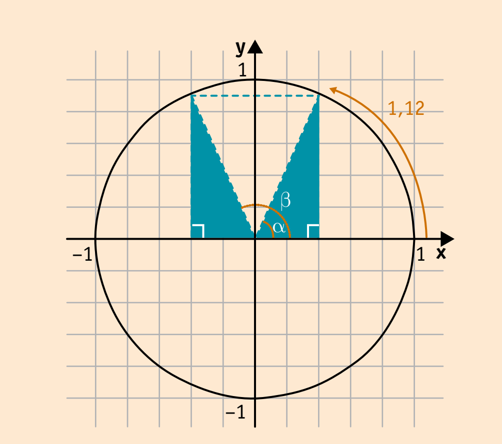
0,9 2NDF o INV o SHIFT y sin

Al hacer estas operaciones en el visor aparece el número 1,119769515; lo que significa que para un ángulo de aproximadamente 1,12 radianes su seno es 0,9.

Si la calculadora hubiera estado en modo DEG, en el visor habría aparecido el número 64,1580672 que es la medida del ángulo en grados sexagesimales.

Es decir, 1,12 radianes es aproximadamente igual a 64,16° = 64° 9′ 36″.

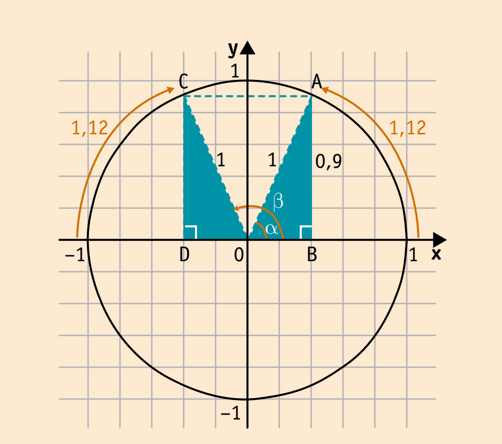
Pero un análisis de ese ángulo en la circunferencia trigonométrica, permite reconocer que existe un ángulo mayor que $\frac{\pi}{2}$ que también tiene seno igual a 0,9. Ese valor no lo da la calculadora, entonces,



¿cómo saber cuál es el otro ángulo de la circunferencia trigonométrica que también tiene seno 0,9?

Los dos triángulos rectángulos, OBA y ODC que quedan determinados son congruentes pues tienen dos pares de lados iguales, un lado que mide 0,9 y otro lado que mide 1, que es el radio de la circunferencia. Puede observarse entonces en la figura que el ángulo β es igual al ángulo π menos α es decir,

$$\beta = \pi - 1{,}12 = 2{,}02$$



Entonces 2,02 tiene seno igual que 1,12, pues, al ser los triángulos iguales, las coordenadas que responden al valor del seno son iguales y del mismo signo.

Estos ángulos tienen coseno de igual módulo pero con signo distinto, esto es $\cos 2{,}02 = -\cos 1{,}12$, ya que miden lo mismo pero en sentido contrario.

Problema 5

¿Cuáles son los ángulos comprendidos entre 0 y 2π cuyo seno es igual a –0,9?

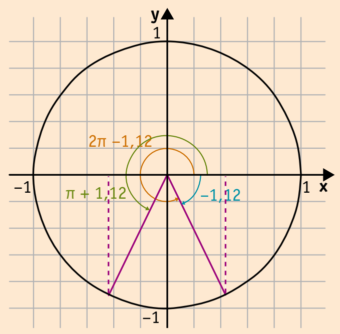
El problema plantea la ecuación sen $\alpha = -0{,}9$.

Si se utiliza la calculadora aparece en el visor aproximadamente –1,12.

¿Qué significa un ángulo de –1,12?

Esto significa que se comenzó a medir el ángulo para el otro lado, es decir, se cambió el sentido con el cual se está midiendo.

Un ángulo negativo se mide en sentido horario. Entonces, el ángulo de $-1,12$ resulta ser equivalente a $2\pi - 1,12 = 5,16$. Y como $-1,12$ es menor que 0, el ángulo cuyo seno es igual a $-0,9$ y se encuentra entre 0 y 2π es 5,16. Pero el ángulo que surge de hacer $\pi + 1,12 = 4,26$ también verifica: sen $4,26 = -0,9$. Es decir, se le agregó a π lo mismo que se le quitó a 2π, para obtener dos triángulos iguales.



Problema 6

Hallar un ángulo cuyo seno sea igual a 2.

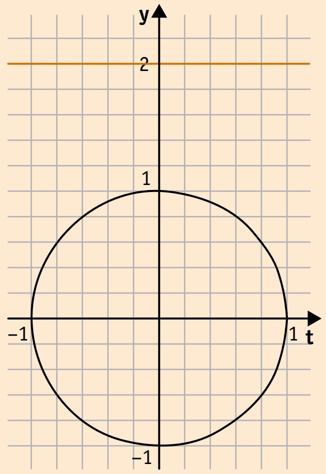
Como se conoce el valor del seno y se quiere hallar el ángulo, en la calculadora debe presionarse la tecla $\sin^{-1}$ y luego el valor del seno.

Al hacer $\sin^{-1}(2)$ el visor de la calculadora indica "error".

¿Por qué sucede esto?

Al calcular $\text{sen}^{-1}(2)$ se intenta encontrar en la circunferencia trigonométrica alguna longitud de arco que cumpla que la altura del triángulo rectángulo que queda determinado sea igual a 2.

Pero, se ha dicho que en la circunferencia trigonométrica, el seno de un ángulo es la coordenada *y* del punto que determina el ángulo y como el radio es 1, no hay ningún punto de ella que tenga una ordenada de 2. **No existe un valor de *t* que cumpla que sen *t* = 2.** Puede observarse en el gráfico que la recta y = 2 no interseca a la circunferencia.



Entonces, *¿cuáles son los valores posibles que puede tomar el seno de t?*

Si se analiza en la circunferencia trigonométrica, el seno de un ángulo se "mueve" en la franja comprendida entre -1 y 1.

$-1 \leq \text{sen}\, t \leq 1$

$-1 \leq \cos t \leq 1$

Relaciones entre el seno y el coseno de un ángulo

Si en la circunferencia trigonométrica se recorre un cierto ángulo en cualquier cuadrante se tiene: sen $t = a$ y $\cos t = b$ donde $(b\,;\,a)$ es el punto en el que interseca el radio a la circunferencia.

Interesa ahora determinar la relación entre el valor de a y el valor de b, lo que permitirá establecer una relación entre el sen t y el $\cos t$.

A partir del teorema de Pitágoras y considerando que en la circunferencia trigonométrica el radio es 1 se puede establecer: $a^2 + b^2 = 1^2$.

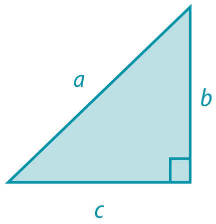
Utilizando esta relación para cualquier valor de t se tiene que:

$$\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$$

Esta relación se denomina *identidad pitagórica*.

El Teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo dice que: "el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

$a^2 = b^2 + c^2$



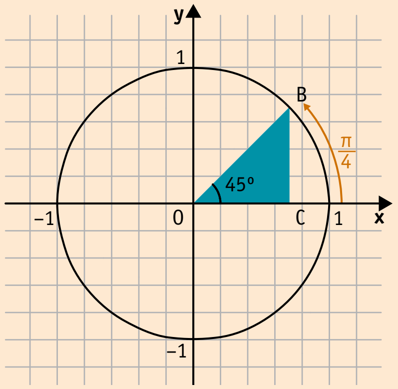
Problema 7

Sin utilizar la calculadora, calcular:

a. $\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$ **b.** $\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$ **c.** $\cos\frac{\pi}{3}$

En la circunferencia trigonométrica $\frac{\pi}{4}$ *equivale* a recorrer la mitad del primer cuadrante sobre la circunferencia, es decir equivale a un ángulo de 45°.

El triángulo OBC que queda determinado dentro de la circunferencia trigonométrica es un triángulo isósceles, porque el ángulo $\frac{\pi}{4}$ equivale a 45°, con lo cual el triángulo OBC es un triángulo rectángulo con un ángulo de 45°, el otro debe ser también de 45°.



Usualmente $(\text{sen}\, t)^2$ se escribe como $\text{sen}^2\, t$.
Por eso $\text{sen}^2\, t = \text{sen}\, t \cdot \text{sen}\, t$.
Para cualquier valor de t siempre se puede relacionar el valor del sen t y del cos t.

$$\text{sen}^2\, t + \cos^2 t = 1$$

Esta igualdad se llama **identidad pitagórica.**

Por lo tanto, la altura y la base del triángulo OBC son iguales, lo que dentro de la circunferencia trigonométrica significa que el $\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$ y el $\cos\frac{\pi}{4}$ son iguales.

Si se utiliza la identidad pitagórica:

$\text{sen}^2\frac{\pi}{4} + \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$	Se reemplaza $\cos\frac{\pi}{4}$ por *sen* $\frac{\pi}{4}$.
$2 \cdot \text{sen}^2\frac{\pi}{4} = 1$	Se opera.
$\text{sen}^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$	Se despeja.
$\left\lvert\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right\rvert = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Se extrae raíz cuadrada en ambos miembros.

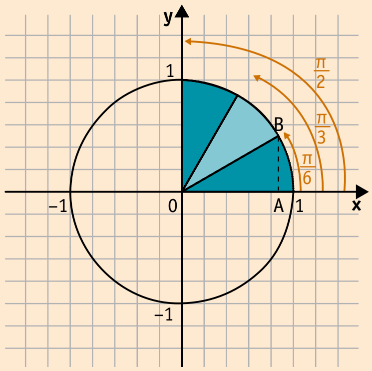
Como $\frac{\pi}{4}$ se encuentra en el primer cuadrante, el valor de su seno es positivo, luego:

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto $\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

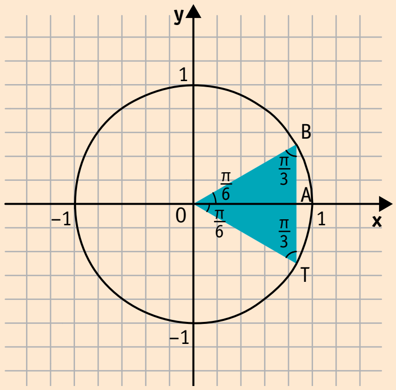
Para comenzar a calcular sen $\frac{\pi}{6}$ es conveniente ubicar al ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes en la circunferencia trigonométrica.

$\frac{\pi}{6}$ equivale a la sexta parte de π, o lo que es lo mismo, a la tercera parte de $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, para hallar $\frac{\pi}{6}$ es posible tomar el primer cuadrante y dividirlo en tres parte iguales.
El primer punto de la circunferencia es $\frac{\pi}{6}$, el segundo es $\frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$ y el tercero que coincide con $\frac{3}{6}\pi = \frac{\pi}{2}$.
El triángulo OBA es rectángulo y tiene un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es decir 30°. El ángulo OBA mide entonces 60°, o sea, $\frac{\pi}{3}$.



Dos ángulos son **complementarios** si al sumarlos resulta igual a $\frac{\pi}{2}$.

Si ahora se señala $-\frac{\pi}{6}$ se obtiene un triángulo BOT donde el ángulo
$B\hat{O}T = B\hat{O}A + A\hat{O}T = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2}{6}\pi = \frac{\pi}{3}$.
Y los ángulos BTO y OBT también.
El triángulo BOT tiene los tres ángulos que miden $\frac{\pi}{3}$, es decir, de 60° por lo tanto es un triángulo equilátero. Esto significa que los tres lados miden lo mismo y como los lados OB y OT son radios de la circunferencia, miden 1, entonces $\overline{BT}$ mide también 1.



Por otro lado el eje *x* es perpendicular al lado BT del triángulo y como pasa por el vértice opuesto además es una altura. Como es un triángulo equilátero la altura divide a la base en dos partes iguales, $\overline{BA} = \overline{AT} = \frac{1}{2}$. Pero sen $\frac{\pi}{6} = \overline{AB} \Rightarrow$ sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

De aquí se puede calcular cos $\frac{\pi}{6}$ a partir de la relación pitagórica y sabiendo que es un número positivo. Es decir:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

El triángulo OBA, de la figura anterior, es rectángulo y tiene un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, uno de $\frac{\pi}{3}$ y la hipotenusa mide 1. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \overline{OA} \text{ y } \cos \frac{\pi}{3} = \overline{AB} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \overline{AB} \text{ y } \cos \frac{\pi}{6} = \overline{OA} \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y } \cos \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

sen t = cos $\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

cos t = sen $\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

Problema 8

Calcular, sin utilizar la calculadora:

a. sen $\frac{5}{6}\pi$ **b.** cos $\frac{5}{6}\pi$ **c.** sen $\frac{11}{6}\pi$ **d.** cos $\frac{11}{6}\pi$

El ángulo que mide $\frac{5}{6}\pi$ es un ángulo que se encuentra en el segundo cuadrante pues $\frac{5}{6}\pi$ es mayor que $\frac{\pi}{2}$ y menor que π.

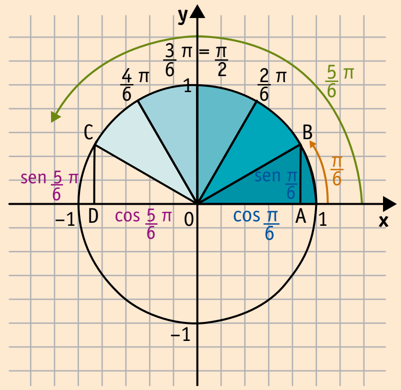
Así como para hallar $\frac{\pi}{6}$ se tomó el primer cuadrante y se lo dividió en tres parte iguales, para hallar $\frac{5}{6}\pi$ se puede dividir en tres partes iguales el segundo cuadrante.

De este modo resultan dos triángulos, OBA y OCD, congruentes pues tienen el ángulo que forma cada hipotenusa con el eje horizontal iguales, un ángulo recto y la hipotenusa igual.

Por lo tanto, el sen $\frac{5}{6}\pi$ y el sen $\frac{\pi}{6}$ resultan ser iguales, pero el cos $\frac{5}{6}\pi$ y el cos $\frac{\pi}{6}$ resultan ser del mismo módulo pero con signo contrario; en conclusión

$$\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$

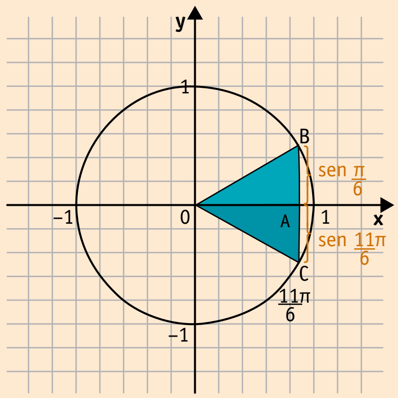
$\cos t = -\cos(\pi - t)$

El ángulo que mide $\frac{11}{6}\pi$ se encuentra en el cuarto cuadrante pues $\frac{11}{6}\pi$ es mayor que $\frac{3}{2}\pi$ y menor que 2π.

Como $\frac{11}{6}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, los triángulos OBA y OCA son congruentes; puede observarse entonces que:

$$\operatorname{sen}\frac{11}{6}\pi = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(2\pi - t)$

$\cos t = \cos(2\pi - t)$

6. ¿Será cierto que el seno de 90° es lo mismo que el seno de 270° pero cambiado de signo?

7. Encuentren el valor de dos ángulos cuyos cosenos valgan el mismo número pero cambiado de signo.

8. ¿Entre qué valores se encuentra el coseno de t? Justifiquen su respuesta.

9. Utilizando la calculadora científica calculen los siguientes valores:

a. sen 3,15 **b.** cos 0,178 **c.** sen $\frac{1}{7}\pi$ **d.** cos 10 **e.** sen 1

10. Busquen con la calculadora para qué valores de x entre 0 y 2π se cumple cada igualdad:

a. $\cos x = 0{,}0001$ **b.** $\operatorname{sen} x = 0{,}89$ **c.** $\operatorname{sen} x = 0{,}32$ **d.** $\cos x = 0{,}99999$

11. Encuentren en cada caso un ángulo x que verifique lo pedido:

a. x se encuentra en el cuarto cuadrante y $\cos x = 0{,}618$.

b. $\operatorname{sen} x = 0{,}64278$ y x está entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{2}\pi$.

c. x que se encuentra entre 0 y 2π y $\cos x = -0{,}78$.

Analicen en cada caso cuántas soluciones posibles hay.

12. Completen, sin utilizar calculadora, la siguiente tabla

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
sen t													
cos t													

Definición de las funciones seno y coseno

Después de este recorrido con los ángulos y los triángulos es posible establecer una relación funcional entre un ángulo y su seno o su coseno. Se estudió que cada ángulo tiene un único valor posible para seno y para coseno. Entonces es posible relacionar la medida de un ángulo y el valor que toma el seno o la medida de un ángulo y el valor que toma el coseno para ese ángulo.

Se definen entonces dos funciones: $f(t) = \text{sen } t$ y $g(t) = \cos t$ donde cada valor t se corresponde con un ángulo medido en radianes.

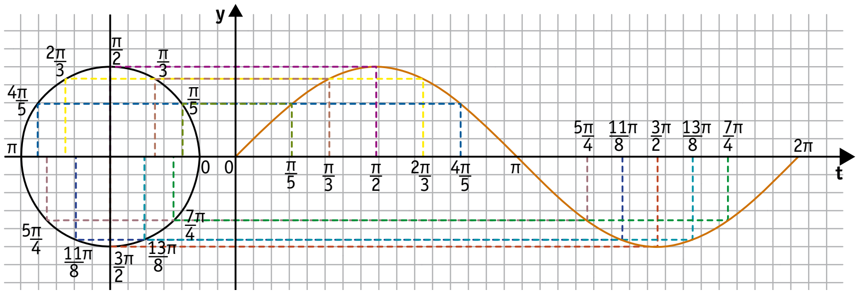
El dominio de estas funciones son todos los números reales. Es decir:

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} \quad Dom\ (g) = \mathbb{R}$$

Problema 9

Graficar la funcion $f(t) = \text{sen } t$.

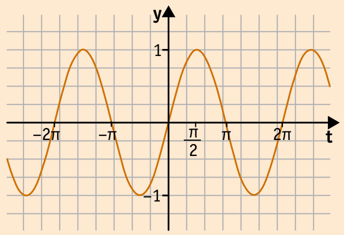
Para comenzar a analizar el gráfico de $f(t)$ es conveniente recurrir a la circunferencia trigonométrica pues para cada ángulo, su seno es la ordenada del punto que es la intersección del radio con la circunferencia. Si se comienza a marcar distintos ángulos en la circunferencia trigonométrica y luego se trasladan al gráfico se puede observar:



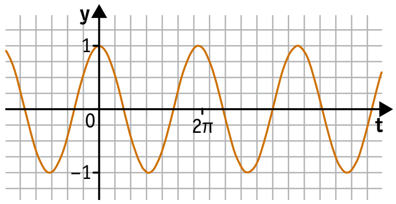
Una vez que se recorrió toda una vuelta es posible seguir recorriendo otra vuelta de la circunferencia, es decir, recorrer por ejemplo $\frac{9}{4}\pi$. Pero, como su altura es igual que para $\frac{\pi}{4}$, resulta que tanto el seno de $\frac{\pi}{4}$ como el seno de $\frac{9}{4}\pi$ son iguales. Por lo tanto, la función continúa el mismo comportamiento cada vez que pasa una vuelta.

$\text{sen}\,(2\pi + t) = \text{sen}\,t$
$\cos\,(2\pi + t) = \cos\,t$

La función $f(t) = \text{sen } t$ es, entonces, una función continua y periódica. Su grafico es:



13. El siguiente gráfico representa la función $g(t) = \cos t$. Expliquen qué datos necesitarían trasladar de la circunferencia trigonométrica para poder realizarlo.



Estudio de las funciones seno y coseno

Como se vio en el gráfico de la función $f(t)$ = sen t, ésta tiene un período que se repite indefinidamente. *¿Qué otras particularidades tiene esta función?*

Problema 10

Dadas las funciones $f(t)$ = sen t, $g(t)$ = cos t, calcular:

a. El período y la amplitud de una onda de $f(t)$. **b.** La imagen de $f(t)$.

Se denomina **período** de una función a la longitud de un ciclo que se repite. Si una función, f, tiene un período p, entonces la función toma el mismo valor para los valores de x que se encuentran a una distancia de p.

$$f(x+p)=f(p)$$

Como se analizó en el problema anterior, resulta que cada vez que se realiza una vuelta completa sobre la circunferencia trigonométrica, el gráfico de f comienza a repetirse.

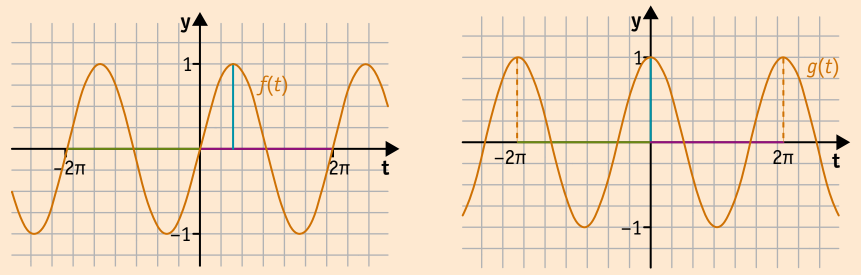
Esto sucede porque una vez que se completó una vuelta, los puntos sobre la circunferencia trigonométrica comienzan a repetirse. La medida del seno, entonces, comienza a repetirse. Por ejemplo, tanto el ángulo 0 como el ángulo 2π tienen el mismo seno y el mismo coseno, al igual que el ángulo $\frac{\pi}{2}$ y el ángulo $\frac{5}{2}\pi$ y cada vez que se den vueltas completas y se vuelva al mismo lugar se obtendrá el mismo valor para el seno y el coseno de esos ángulos. Entonces, el período de las funciones $f(t)$ = sen t y $g(t)$ = cos t es de 2π.

Como los valores del seno y el coseno siempre varían entre −1 y 1, la altura mayor que alcanza la onda es 1, se dice entonces que la **amplitud de la onda** es de 1.

Se llama **amplitud** a la altura de la onda.

El seno y el coseno de un ángulo se "mueven" entre −1 y 1, luego, los valores posibles que pueden tomar f y g están entre −1 y 1 ⇒ ***Im (f)* = [−1 ; 1] *y Im (g)* = [−1 ; 1]**

Puede observarse entonces que:



La imagen de las funciones $f(t)$ = sen t, $g(t)$ = cos t es [−1 ; 1].

Cálculo de ceros

Los ceros de una función son los valores de la variable que provocan que la función valga 0. Gráficamente son los valores de t donde el gráfico de la función corta el eje horizontal. Se analizará a continuación cuáles son esos valores para las funciones seno y coseno.

Problema 11

a. Con la calculadora en DEG o RAD según corresponda, realizar los siguientes cálculos:

sen 0° = … sen π = … sen 360° =…. sen 3π = …. sen 720° = …

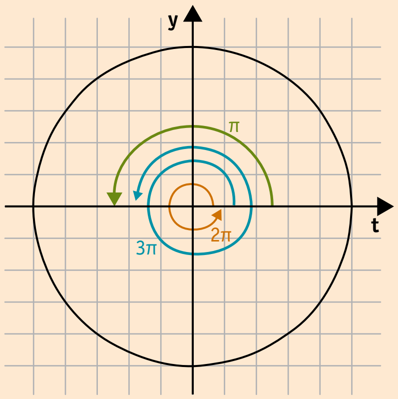
b. ¿Cómo se pueden explicar los resultados obtenidos?

c.¿Cuáles son todos los valores de t que verifican sen t = 0?

Al utilizar la calculadora se observa que:

sen 0° = 0 sen π = 0 sen 360° = 0 sen 3π = 0 sen 720° = 0

Si se analiza en la circunferencia trigonométrica, el seno de un arco de longitud t, es decir, el valor de la ordenada del punto que determina en la circunferencia, solo es cero en los valores de $t = 0$ y $t = \pi$. Por lo tanto, cada vez que, al recorrer la circunferencia se pase por esos puntos, la segunda coordenada es 0, lo que implica que el seno es 0.



¿Cuáles son los otros valores de t que cumplen sen t = 0?

El punto de la circunferencia trigonométrica que equivale a $t = 0$ es el mismo que corresponde a cada vuelta completa. El ángulo que se obtiene cuando se recorre una vuelta es 2π, si se recorren 2 vueltas es 4π, si se recorren 3 vueltas es 6π. Es decir, si se recorre una cantidad entera de vueltas, por ejemplo k vueltas (donde k es un número entero), la longitud de arco recorrida sobre la circunferencia es de $2\pi k$. Para cada uno de esos ángulos el seno vale 0, ya que corresponden a un punto de ordenada 0, el (1 ; 0).

Si los ángulos están medidos en grados, el seno de cualquier múltiplo de 360° vale 0.

Si se recorre media vuelta, es decir un ángulo de π radianes, el seno también vale 0. Una vez que se está "parado" en ese punto, cada vez que se le sume una cantidad entera de vueltas se vuelve a "caer" en el mismo punto. Sumar vueltas enteras es sumar $2\pi k$, donde k es un número entero que señala la cantidad de vueltas. Así, $k = 3$ significa que se recorrieron 3 vueltas enteras, lo que equivale a $2\pi \cdot 3 = 6\pi$.

Si al ángulo que mide π se le agregan 3 vueltas, se agregan 6π más, por lo tanto, en total se recorre $\pi + 6\pi = 7\pi$. Y en este caso, sen 7π = sen π = 0. Es decir que el seno de cualquier múltiplo de π o de 180°, expresado en grados, vale 0.

¿Significa que tanto π como π + 2π k, es decir, k vueltas más de π representan el mismo ángulo?

No, son dos ángulos **distintos**, pues un arco de longitud π se corresponde con un ángulo de 180º, en cambio un arco de longitud 7π se corresponde con haber girado 180º y 3 veces más 360º, es decir, se giró un total de 1260º. No son iguales.

De este modo, la función seno tiene infinitos ceros que se encuentran todos a la misma distancia unos de otros. Cada vez que se da medio giro a partir de 0, el seno se anula, por lo tanto dos ceros consecutivos de esta función se encuentran a una distancia de π, que se corresponde con la mitad del período.

$$C^0 = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

sen $(0 + 2\pi k) = 0$

sen $(\pi + 2\pi k) = 0$

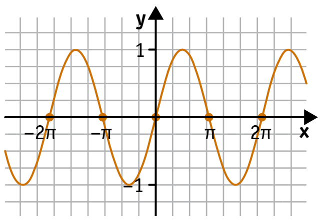
donde $k \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, la función f tiene **ceros** en los puntos t que pueden describirse de la forma

$t = 0 + 2\pi k$

$t = \pi + 2\pi k$

con $k \in \mathbb{Z}$



Máximos y mínimos. Conjunto de positividad y negatividad

Problema 12

Hallar, si existen, los valores máximos y mínimos de la función $f(t)$ = sen t.
¿Para qué valores de t la función alcanza esos máximos o mínimos?

Como se analizó anteriormente, $Im\ (f) = [-1\ ;\ 1]$, lo que significa que el **mayor valor** que puede alcanzar el seno es **1**, mientras que el **menor valor** es **–1**.

Para saber dónde se alcanzan esos valores máximos o mínimos hay que hallar los valores de t que cumplan sen $t = 1$ y los que cumplan sen $t = -1$.

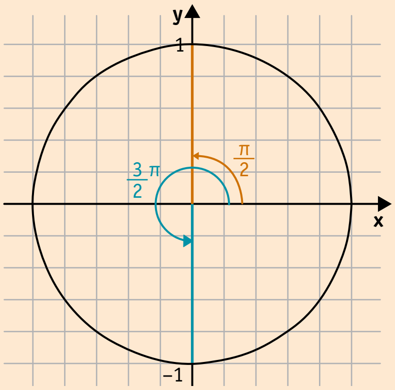
Si se analiza la circunferencia trigonométrica puede observarse que
sen $\frac{\pi}{2} = 1$ y sen $\frac{3}{2}\pi = -1$.
Pero esto también se cumple para cualquier ángulo que se obtenga agregando vueltas enteras a partir de $\frac{\pi}{2}$ o de $\frac{3}{2}\pi$.
Resulta de este modo que f tiene infinitos máximos pero todos ellos alcanzan el mismo valor 1.
Todos los máximos son de la forma

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Además tiene infinitos mínimos, que son

$$t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Todos ellos alcanzan el mismo valor –1.



Si $k \in \mathbb{Z}$
sen $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = 1$
sen $(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k) = -1$

La función $f(t)$ = sen t tiene máximos en los valores de t que tienen la forma
$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

La función $f(t)$ = sen t tiene mínimos en los valores de t de la forma
$t = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 13

Encontrar los conjuntos de positividad y negatividad de $f(t)$ = sen t.

En la circunferencia trigonométrica es posible analizar cuándo el seno toma valores positivos y cuándo toma valores negativos.

Para que el seno sea positivo, es decir para que sea positiva la ordenada de un punto en la circunferencia, el ángulo tiene que estar en el primer o el segundo cuadrante, o sea comprendido entre 0 y π.

Para que el seno de un ángulo resulte negativo, el ángulo tiene que estar en el tercer o el cuarto cuadrante, lo que se corresponde con los ángulos comprendidos entre π y 2π.

Entonces f es positiva en el intervalo $(0\ ;\ \pi)$ y negativa en el intervalo $(\pi\ ;\ 2\pi)$.

Por lo tanto si solo se analizaran ángulos entre 0 y 2π se tendría que:

$$C^+ = (0\ ;\ \pi) \text{ y } C^- = (\pi\ ;\ 2\pi)$$

$f(t) = \text{sen}\, t$ es **positiva** en los intervalos de la forma

$(0 + 2\pi k\,;\, \pi + 2\pi k)$

y es **negativa** en los intervalos de la forma

$(\pi + 2\pi k\,;\, 2\pi + 2\pi k)$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Pero si se realiza un análisis apoyándose en el gráfico y teniendo en cuenta que la función es continua y periódica, resulta que entre dos ceros consecutivos se tiene un conjunto de positividad o bien de negatividad de la función.

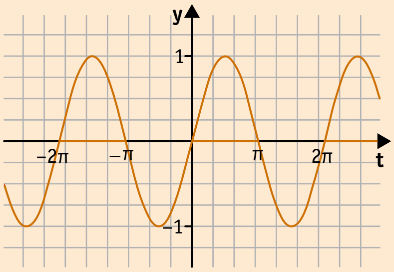
f es positiva en los intervalos de la forma

$(0 + 2\pi k\,;\, \pi + 2\pi k)$

y es negativa en los intervalos de la forma

$(\pi + 2\pi k\,;\, 2\pi + 2\pi k)$

donde k es un número entero.



Comportamiento de $f(t)$ = sen t en $+\infty$ y $-\infty$

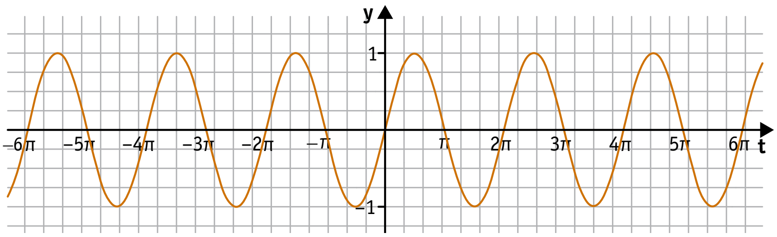
Cuando se dice que **"t tiende a más infinito"** y se escribe $t \to +\infty$, se refiere a que t toma valores **cada vez más grandes** en valor absoluto con signo **positivo**. Es decir, en la recta numérica el valor de t "se aleja" hacia la derecha. En cambio, cuando se dice que **"t tiende a menos infinito"** y se escribe $t \to -\infty$, se refiere a que t toma valores cada vez **más grandes** en valor absoluto pero con signo **negativo**. En la recta numérica, "se aleja" hacia la izquierda.

La función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a infinito, ya sea $+\infty$ o $-\infty$, significa que cuando x toma valores muy grandes en valor absoluto, la función $f(x)$ evaluada en esos puntos **también** resulta ser **muy grande** en valor absoluto. Es decir, la función se continúa "alejando" del eje x ya sea hacia arriba o hacia abajo.

Problema 14

Calcular el límite de $f(t)$= sen t cuando $t \to +\infty$ y cuando $t \to -\infty$.

El gráfico de $f(t)$ es:



La función $f(x)$ tiende al valor L cuando x tiende a infinito, ya sea $+\infty$ o $-\infty$, gráficamente significa que a medida que x **toma valores muy grandes en valor absoluto** ya sea hacia la izquierda ($-\infty$) o hacia la derecha ($+\infty$), la función evaluada en esos x se "mete" en una franja del ancho tan chiquito como se elija, centrada en la recta $y = $ L. De este modo para esos valores de x **muy grandes en valor absoluto**, $f(x)$ se aproxima al valor L.

En principio, tanto cuando $t \to +\infty$, como cuando $t \to -\infty$, el límite buscado no es igual a infinito pues de ser así, f debería tomar valores cada vez "más grandes".

En este caso, la función se "mueve" en la banda encerrada entre $y = -1$ e $y = 1$. Por lo tanto no existen valores de t donde f resulta mayor, en valor absoluto, que 1.

Se podría suponer que el límite cuando $t \to +\infty$ y $t \to -\infty$ de f debería ser un número, L.

En este caso, la función se tendría que "meter" en una franja muy chiquita alrededor de L. Pero como esta función oscila indefinidamente entre los valores de $y = -1$ e $y = 1$, no existe una franja tan chiquita como se quiera, alrededor de un valor donde f se "meta" completamente para t cada vez más grandes en valor absoluto.

De este modo, no existe $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$, ni $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t)$.

ACTIVIDADES

14. Consideren la función $g(t) = \cos t$.

a. Analicen cuáles son sus ceros.

b. ¿Cuáles son los máximos y mínimos de $g(t)$ y en qué valores los alcanza?

c. ¿Cuáles son los conjuntos de positividad y negatividad de $g(t)$?

d. ¿Cómo se comporta la función $g(t)$ cuando $t \to +\infty$ y cuando $t \to -\infty$?

Desplazamientos de las funciones trigonométricas

Problema 15

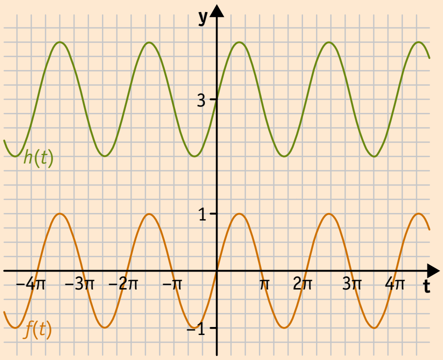
Hallar el gráfico, el período, el dominio y la imagen de la función $h(t)$ = sen t +3.

Para comenzar con el análisis de la función $h(t)$ = sen t + 3 es posible apoyarse en el gráfico que se conoce del sen t.

Al hacer una tabla de valores, se verifica que para esta nueva función $h(t)$ = sen t + 3, dado un t cualquiera, primero se debe calcular su seno, para luego sumarle 3 a ese valor.
Entonces, los valores que se obtengan serán los del seno de t aumentados en 3 unidades.

t	$f(t)$ = sen t	$h(t)$ = sen t + 3
0	0	$0+3=3$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}+3$
$\frac{\pi}{2}$	1	$1+3=4$
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+3$
π	0	$0+3=3$
$\frac{3}{2}\pi$	-1	$-1+3=2$

Gráficamente sería "subir" 3 unidades cada punto del gráfico de seno de t. Por lo tanto, el gráfico de la función $h(t)$ = sen t + 3 queda como el gráfico de sen t pero desplazado 3 unidades hacia arriba.



h(t) = sent + 3 f(t) = sent

¿El período se modificó?

Se sabe que el período p es la longitud de un ciclo, es decir, la distancia que existe entre los valores que "repiten" de la onda. Para el caso de $h(t)$ = sen t + 3 esta distancia **no se modificó**. Esto es, cada vez que se da una vuelta completa de 2π comienza a repetirse el gráfico.

Por lo tanto el período de $h(t)$ = sen t + 3 es $p = 2\pi$.

El dominio para esta función continúa siendo el de todos los números reales, pero en cambio ahora los valores de h "se mueven" entre 2 y 4, por lo tanto:

$Dom\ (h) = \mathbb{R}$ $\qquad$ $Im\ (h) = [2\ ;\ 4]$

Además, al no modificarse la onda, la amplitud sigue siendo 1.

La función $h(t)$ = sen $t + c$, donde c es una constante, produce un **desplazamiento** del gráfico de seno de t en el eje vertical una cantidad de c unidades hacia arriba, si c es positivo, o $|c|$ unidades hacia abajo si c resulta negativo.
Esto produce una modificación en la imagen de la función sen t ya que la imagen para la función $h(t)$ = sen t + c pasa a ser $Im\ (h) = [-1+c\ ;\ 1+c]$
Este corrimiento **no produce modificaciones** en el período ni en la **amplitud**.

Problema 16

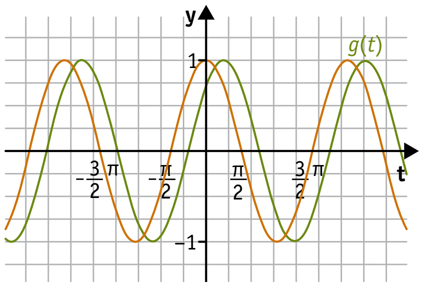
Hacer un gráfico aproximado, y determinar el período, la amplitud y los ceros de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

A diferencia de lo ocurrido en el problema anterior, $\frac{\pi}{4}$ se resta al valor de t y a ese nuevo valor se le calcula el coseno.

Si se realiza una tabla de valores, puede observarse que si t **toma** el valor $\frac{\pi}{4}$, al restarle $\frac{\pi}{4}$, el valor de $t = \frac{\pi}{4}$ pasa a comportarse como el valor $t = 0$. A partir de allí, se empieza a armar el gráfico de $\cos t$ pero corrido hacia la derecha en el eje x en $\frac{\pi}{4}$. Se tiene entonces el gráfico de $\cos t$ pero **corrido** en el **eje horizontal** en $\frac{\pi}{4}$. Tanto su período como su amplitud no se modificaron, pero al haber un desplazamiento en el eje horizontal implica que ahora el gráfico de g corta al eje x en otros puntos, por lo tanto, los ceros de g se modificaron con respecto a los ceros de $\cos t$.

t	$t - \frac{\pi}{4}$	$g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	π	-1
$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	0
2π	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{9}{4}\pi$	2π	1

La función $g(t) = \cos(t + c)$, donde c es una constante, produce un **desplazamiento** del gráfico de coseno de t en el **eje horizontal** una cantidad de $|c|$ unidades hacia la izquierda, si c es positivo, o hacia la derecha si c resulta negativo.
No se producen modificaciones ni en la imagen ni en el período ni en la amplitud de la función coseno de t, pero si en los ceros.



Para hallar los ceros de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ es necesario resolver la ecuación

$$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Para ello se deben calcular, primero, los valores entre 0 y 2π que hacen que $\cos x = 0$.

$$\cos x = 0 \text{ y } 0 \le x \le 2\pi \iff x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ o } t - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi \iff$$
$$t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ o } t = \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Pero existen otros valores de t que también son ceros de $g(t)$.

Como el período de g es $p = 2\pi$ resulta que todos aquellos valores que estén a una distancia de $p = 2\pi$ tendrán la misma imagen a través de g.

Entonces, todos los valores de t que estén a una cantidad de vueltas completas de $t = \frac{3}{4}\pi$ o de $t = \frac{7}{4}\pi$ tienen el mismo valor de $g(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Por lo tanto, **todos los ceros de g** son los valores t de la forma $t = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$ o bien de la forma $t = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k$ donde en ambos casos k debe ser un número entero cualquiera.

Estudio de las variaciones de la amplitud y del período

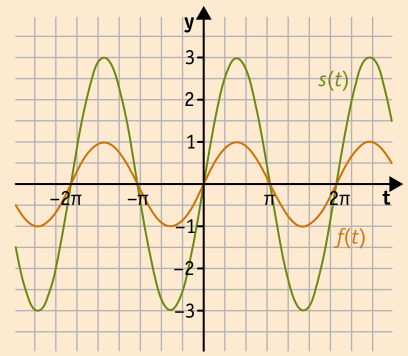
Problema 17

Hallar el período, la amplitud, los ceros y el gráfico de:

a. $s(t) = 3$ sen t **b.** $h(t) = -2$ cos t **c.** $m(t) =$ sen $(2t)$ **d.** $n(t) =$ cos $(\frac{1}{2}t)$

Nuevamente es posible armar una tabla de valores para $s(t)$:

t	$f(t) = \text{sen}\, t$	$s(t) = 3 \cdot \text{sen}\, t$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{3}{2}\pi$	-1	-3
2π	0	0



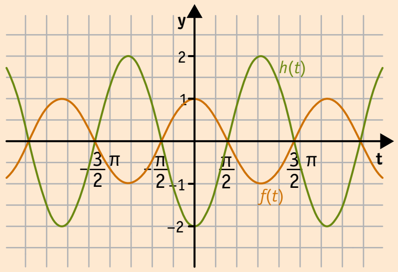
Por lo tanto, si a cada valor de sen t se lo multiplica por 3, se produce una **distorsión** en la onda del gráfico de sen t, pero mantiene los ceros de la función ya que si sen $t = 0$, también 3 sen $t = 0$.

El período no cambia pero lo que cambia es la amplitud de la onda que ahora es 3.

Al modificarse la amplitud de onda, también se modifica la imagen. Ahora se tiene que

$$Im\ (s) = [-3\ ;\ 3]$$

En el caso de la función $h(t) = -2$ cos t a cada valor del cos t hay que multiplicarlo por -2, se produce una amplitud mayor de la onda, y se invierte el gráfico. El **período y los ceros se mantienen**, y la **amplitud de onda se duplica**.



Es posible comenzar a analizar la función m a través de una tabla de valores.

t	$2t$	$m(t) = \text{sen}\,(2t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
π	2π	0

Al tener que calcular el seno de un ángulo que es el **doble de t**, el valor del seno se repite más seguido.

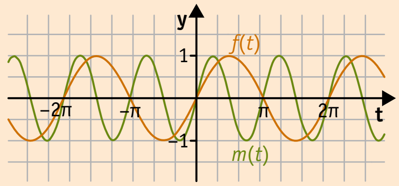
Por ejemplo si t toma el valor $\frac{\pi}{4}$ al tomar el doble, pasa a "comportarse" como el valor $t = \frac{\pi}{2}$ en la función sen t. Lo mismo sucede con el valor de $t = \pi$ que al tomar el doble se comporta como $t = 2\pi$ en la función sen t.

La función $s(t) = a \cdot$ sen t, "estira" o "aplasta" la onda de la función seno, es decir, dilata o comprime verticalmente el gráfico ya sea que a sea mayor que 1 o que a sea mayor que 0 y menor que 1. Si además a resulta ser negativo, el gráfico se invierte con respecto al eje horizontal.

Esto produce una modificación en la amplitud de onda y como consecuencia, en la imagen, pero el período se mantiene.

La amplitud pasa a ser el valor absoluto de a, esto es $|a|$ y la imagen $Im\ (s) = [-|a|\ ;\ |a|]$

Se produce una **compresión** del gráfico en sentido horizontal, debido a lo cual la longitud de la onda es menor, es decir, cambia el período. La función se repite cada π. Por lo tanto, cuando se toma el doble del valor de la variable, el período se reduce a la mitad.

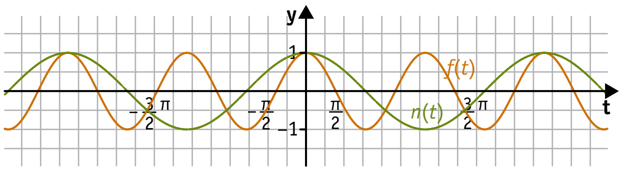


$f(t) = \text{sen } t$ $\quad m(t) = \text{sen } (2t)$

Las funciónes $m(x) = \text{sen } (ax)$ y $g(x) = \cos (ax)$, provocan una distorsión de la onda, ya sea comprimiéndola, en el caso de a mayor que 1, o dilatándola si a es mayor que 0 y menor que 1. En este caso se **mantiene** la **imagen**, pero se **modifica** el **período** que pasa a ser

$$p = \frac{2\pi}{|a|}$$

Al tomar n(t) los valores de la mitad de t, el período se duplica, por lo tanto, el coseno se volverá a repetir cada 4π.



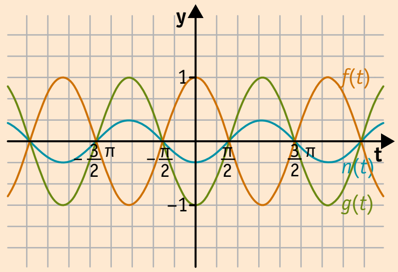
Problema 18

¿Cuál es el gráfico de la función $n(t) = \frac{1}{3} \cos (t + \pi)$?

Si se tiene como base la función cos t, la gráfica de la función $g(t) = \cos (t + \pi)$ se obtiene desplazándola en el eje horizontal π unidades hacia la izquierda. Debido a esto, un ciclo de $g(t)$ comienza en $-\pi$. En este caso no se modifica ni la amplitud, ni el período, ni la imagen.

La función $g(t)$, se multiplica por $\frac{1}{3}$. Esto produce una **compresión** del gráfico en el **eje horizontal**. Lo cual también produce una modificación de la amplitud y en la imagen. Por lo tanto, se tiene

$Amplitud = \frac{1}{3}$ $\qquad Im\ (n) = [-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}]$



$f(t) = \cos t$ $\quad g(t) = \cos (t + \pi)$

$n(t) = \frac{1}{3} \cos (t + \pi)$

ACTIVIDADES

15. Para cada función señalen dominio, imagen, período, amplitud, y hagan un gráfico aproximado.

a. $f(t) = \cos t - 2$ **b.** $f(t) = \cos (t - \frac{\pi}{2})$ **c.** $f(t) = \text{sen}(t - 3)$

d. $f(t) = \text{sen } t - 3$ **e.** $f(t) = \text{sen } (t - \frac{\pi}{2})$ **f.** $f(t) = \cos (t + \frac{\pi}{3})$

g. $f(t) = \frac{1}{2} + \text{sen } t$ **h.** $f(t) = 5 + \cos t$

16. La función $f(x) = \cos (x + 1)$ y la función $g(x) = \cos x + 1$, ¿son la misma función? ¿Por qué?

17. Para cada función señalen dominio, imagen, período, amplitud, y hagan un gráfico aproximado.

a. $f(t) = -3 \cdot \cos t$ **b.** $f(t) = \frac{5}{3} \text{sen } t$ **c.** $f(x) = \cos (\frac{2}{3} t)$

d. $f(t) = \text{sen } (3t)$ **e.** $f(t) = 2 \cos (t + \frac{\pi}{3})$ **f.** $f(t) = \text{sen } (2t) - 1$

18. $f(t) = 2 \text{ sen } t$ y $g(t) = \text{sen } (2\,t)$, ¿son la misma función? ¿Por qué?

Ecuaciones trigonométricas

En este capítulo ya se han planteado y resuelto algunas ecuaciones trigonométricas. Por ejemplo, al buscar los ceros de una función fue necesario plantear una condición sobre la función, que se tradujo en plantear una ecuación.

En esta parte del capítulo trataremos las ecuaciones trigonométricas con mayor detalle.

Problema 19

Dada la función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$. ¿Cuáles son los valores de x entre 0 y 2π que cumplen que $f(x) = \frac{1}{2}$?

Hallar estos valores implica plantear la ecuación:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Para resolver esta ecuación es necesario, en principio, hallar los valores de la variable t que cumplen $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2}$.

Por lo analizado anteriormente $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y también $\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Se tiene entonces que:

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$$

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{6}\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Pero no todos los valores hallados se encuentran entre 0 y 2π como pedía el problema. Es necesario encontrar los valores entre 0 y 2π que verifiquen la ecuación.

Como la función $f(x)$ tiene un período de 2π, los valores de $f(x)$ se repiten cada vez que a x se le suma un período, o dos períodos o números enteros de períodos.

Por lo tanto si a $x = -\frac{\pi}{3}$ y a $x = \frac{\pi}{3}$ se le suman $2\pi k$ donde k es un número entero, resulta que $f(x)$ sigue valiendo $\frac{1}{2}$.

Esto significa que hay infinitos valores que verifican la ecuación pedida, ellos son:

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{y} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como x debe verificar, además que $0 \leq x \leq 2\pi$:

si $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow$

$$0 \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 2\pi + \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$$

y dado que $k \in \mathbb{Z}$ debe ser $k = 1$.Luego $x = \frac{5}{3}\pi$.

Si $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq 2\pi k \leq 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$$

y dado que $k \in \mathbb{Z}$ debe ser $k = 0$. Luego $x = \frac{\pi}{3}$.

Las soluciones de la ecuación que están entre 0 y 2π son entonces $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5}{3}\pi$.

Para resolver algunas ecuaciones trigonométricas es posible apoyarse en los valores conocidos de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ y realizar una sustitución de la variable como en el ejemplo que figura en el problema 19 donde se sustituyó $x + \frac{\pi}{2}$ por t.

$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(\pi - t)$
$\cos t = -\cos(\pi - t)$
$\operatorname{sen} t = -\operatorname{sen}(2\pi - t)$
$\cos t = \cos(2\pi - t)$

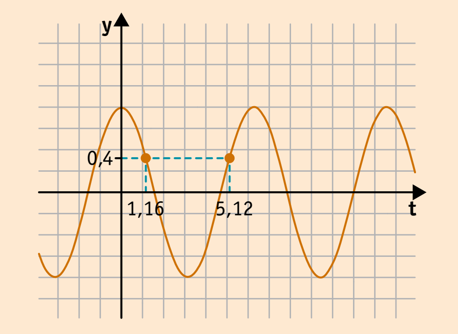
Problema 20

Hallar los valores de x que pertenezcan al intervalo $[-\pi ; 3\pi]$ y que cumplan $\cos(2x) = 0{,}4$.

Si se sustituye $2x$ por t, es necesario resolver la ecuación $\cos t = 0{,}4$.

Con ayuda de la calculadora, puesta en modo RAD, puede deducirse que un valor posible de t es $1{,}15927948 \approx 1{,}16$. Este valor de t pertenece al primer cuadrante. Por lo analizado anteriormente, existe otro ángulo en el cuarto cuadrante que también tiene coseno 0,4; éste se calcula resolviendo $t = 2\pi - 1{,}16 \approx 5{,}12$.

Si se tiene el gráfico de $f(t) = \cos t$, se buscan los valores de t entre 0 y 2π cuya imagen de la función sea 0,4.



Luego:

$$t \approx 1{,}16 \;\Rightarrow 2x \approx 1{,}16 \Rightarrow x \approx 0{,}58$$
$$t \approx 5{,}12 \;\Rightarrow 2x \approx 5{,}12 \Rightarrow x \approx 2{,}56$$

Pero éstas no son las únicas soluciones de la ecuación dado que al ser $f(x) = \cos(2x)$ una función periódica, cuando se le suman períodos a los valores de x, se obtienen los mismos resultados para y.

El período de $f(x) = \cos(2x)$ es π, con lo cual todas las soluciones de la ecuación son:

$$x = 0{,}58 + k\pi \qquad \text{o} \qquad x = 2{,}56 + k\pi \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrar los valores de x que están entre $-\pi$ y 3π se puede resolver:

$x = 0{,}58 + k\pi$ y $-\pi \le x \le 3\pi$	$x = 2{,}56 + k\pi$ y $-\pi \le x \le 3\pi$
$-\pi \le 0{,}58 + k\pi \le 3\pi$	$-\pi \le 2{,}56 + k\pi \le 3\pi$
$-3{,}14 - 0{,}58 \le k\pi \le 3\pi - 0{,}58$	$-3{,}14 - 2{,}56 \le k\pi \le 3\pi - 2{,}56$
$-3{,}72 : \pi \le k \le 8{,}84 : \pi$	$-5{,}7 : \pi \le k \le 6{,}86 : \pi$
$-1{,}18 \le k \le 2{,}81$	$-1{,}81 \le k \le 2{,}18$
$k = -1$ o $k =$ $k = 0$ o $k = 1$ o $k = 2$	$k = -1$ o $k = 0$ o $k = 1$ o $k = 2$
$x = -2{,}56$ o $x = 0{,}58$ o $x = 3{,}72$ o $x = 6{,}86$	$x = -0{,}58$ o $x = 2{,}56$ o $x = 5{,}7$ o $x = 8{,}84$

El conjunto solución pedido es S = {–2,56; –0,58 ; 0,58 ; 2,56 ; 3,72 ; 5,7 ; 6,86 ; 8,84}

ACTIVIDADES

19. ¿Para qué valores de x la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 5$ alcanza su máximo valor?

20. Encuentren los ceros de la función $g(x) = \operatorname{sen} x + 3$.

21. ¿Para qué valores de la variable la función $g(x) = \cos(3x)$ alcanza su mínimo valor?

22. ¿Cuáles son los ceros de la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$?

23. ¿Para qué valores de x la función $g(x) = \cos(x + 5)$ alcanza su mínimo valor? ¿Cuál es ese valor mínimo?

24. Indiquen cinco valores difrentes de x que cumplan que $h(x) = 3\operatorname{sen}(2x + \pi) - \frac{1}{2} = 2$.

25. A. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π y que se verifican las ecuaciones:

a. $\operatorname{sen}(2x) = -0{,}951$ **b.** $2\operatorname{sen} x = -0{,}951$

c. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}85$ **d.** $\cos x + 0{,}5 = 0{,}85$

B. Para las ecuaciones anteriores, calculen los valores de x comprendidos entre -2π y $-\pi$ que las cumplan.

Tangente de un ángulo

Además de las relaciones analizadas entre los lados de un triángulo rectángulo existe otra que es el cociente entre el cateto opuesto de un ángulo y su cateto adyacente. Esta relación se llama **tangente** del ángulo.

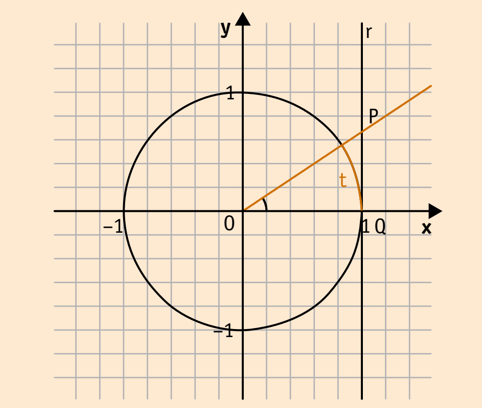
Problema 21

¿Cómo se representa la tangente en la circunferencia trigonométrica?

En un triángulo rectángulo, para todo ángulo agudo *x* se define:

$$tg\, x = \frac{\text{cateto opuesto a } x}{\text{cateto adyacente a } x}$$

Para analizar qué representa la tangente es necesario tener en cuenta la recta $x = 1$ que se llamará *r* y es tangente a la circunferencia.

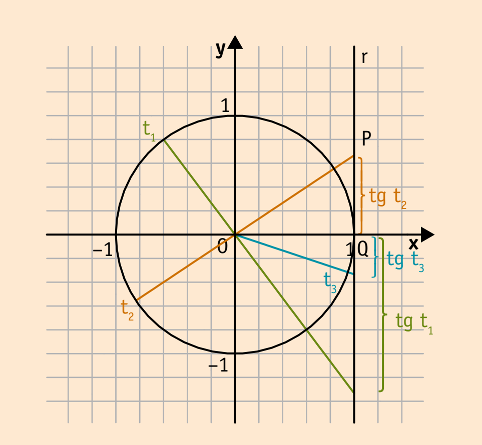


En la circunferencia trigonométrica, al tomar un ángulo *t*, en el primer cuadrante, queda determinado por la prolongación de la semirrecta que forma a *t* sobre la recta *r*, un triángulo rectángulo OPQ

$$\text{tg } t = \frac{\text{cat. op. a } t}{\text{cat. ady. a } t} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$$

Pero $\overline{OQ} = 1$, por lo tanto resulta

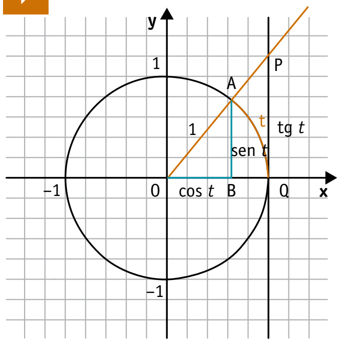
$$\text{tg } t = \overline{PQ}.$$



Si el ángulo está en otro de los cuadrantes, se considera la prolongación del lado correspondiente al ángulo y la medida del segmento que resulta entre el punto donde corta esa prolongación a la recta *r* y el eje *x*. Este segmento es la tangente del ángulo. Puede observarse en el gráfico que en el primer y el tercer cuadrante la tangente será positiva y en los otros cuadrantes, negativa.

Problema 22

La relación $\text{tg } x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, ¿será cierta para cualquier valor de *x*?



Los triángulos OAB y OPQ son semejantes, por lo tanto

$$\frac{\text{tg } t}{1} = \frac{\text{sen } t}{\cos t}$$

Si se sigue un razonamiento análogo al del problema anterior, se observa que la relación es cierta para cualquier ángulo. Por lo tanto, la igualdad parece verificarse siempre.

Pero *¿qué sucede si* $x = \frac{\pi}{2}$ *?*

Si $x = \frac{\pi}{2}$ resulta que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y como no es posible dividir por 0, $\frac{sen\, x}{cos\, x}$ *no existe*. Entonces, la relación anterior es válida siempre que exista la tangente del ángulo, es decir, para aquellos valores de x cuyo coseno no valga cero.

Si se analiza la circunferencia trigonométrica se obtiene que cuando el ángulo es de $\frac{\pi}{2}$, el lado de ese ángulo es paralelo a la recta tangente y por tal motivo no interseca a la recta $x = 1$, entonces no existe el valor de la tangente de $\frac{\pi}{2}$.

Función tangente

Así como a cada ángulo es posible asignarle su seno o su coseno, también es posible asignarle su tangente (aunque con restricciones) obteniendo la función tangente.

Problema 23

Dada la función $f(x) = \operatorname{tg} x$, determinar:

a. El dominio de $f(x)$.
b. Las asíntotas verticales de $f(x)$.
c. Los ceros de $f(x)$.
d. Los intervalos de positividad y de negatividad de $f(x)$.
e. El gráfico de $f(x)$.

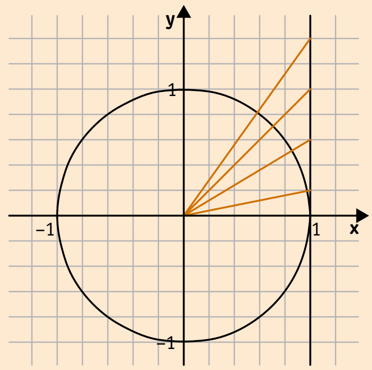
Si se considera a $\operatorname{tg} x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$ resulta que es posible definir esta función para todos aquellos valores de x salvo los valores que anulan al $\cos x$ pues no es posible dividir por 0. Las soluciones de la ecuación $\cos x = 0$ son los valores de x de la forma

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\, k \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi\, h \quad \text{con } k \text{ y } h \text{ números enteros.}$$

De este modo $f(x) = \operatorname{tg} x$ está definida para todos los números reales salvo los valores que son ceros de $\cos x$. Luego

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ;\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi\, h\ /k \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{Z}\}$$

Un análisis en la circunferencia trigonométrica permite observar que, a medida que el valor x se acerca al valor $\frac{\pi}{2}$, el valor de la tangente se hace cada vez más grande. En realidad, lo que sucede es que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$



Si para una función f se tiene un valor a para el cual $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical. Gráficamente, cuando x toma valores cercanos a a, el gráfico de la función se "acerca" a la recta $x = a$ sin tocarla nunca.

Por lo tanto, la recta $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ es una asíntota vertical de la función. Y esto sucede cada vez que x toma el valor $\frac{\pi}{2}$ más una cierta cantidad de vueltas enteras. Es decir, que para cada x de la forma $x = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi k$, donde k es un número entero, resulta que la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene una asíntota vertical con ecuación $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Como $\operatorname{tg} x$ tampoco está definida para los x de la forma $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi h$, con h un número entero, haciendo un análisis similar al anterior resulta que la función también tiene asíntotas verticales con ecuación $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi\, h$ para cada $h \in \mathbb{Z}$.

Para hallar los ceros de $f(x)$ es necesario resolver la ecuación $\operatorname{tg} x = 0$

$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0$$

Por lo tanto, las funciones $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \operatorname{tg} x$ tienen los mismos ceros. Luego:

$$C^0 = \{\pi k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, la tangente de un ángulo es positiva si, el seno y el coseno tienen el mismo signo, es decir si x se encuentra en el primer o en el tercer cuadrante y es negativa si el seno y el coseno tienen distinto signo, es decir si x se encuentra en el segundo o en el cuarto cuadrante.

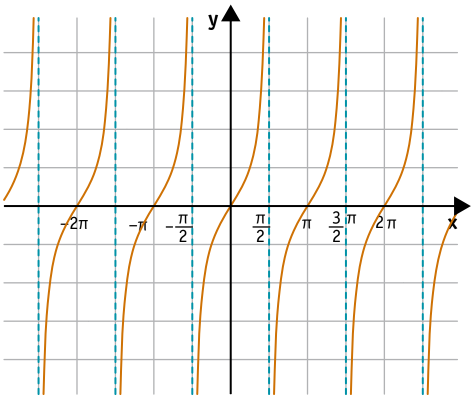
Por lo tanto, resulta que $\operatorname{tg} x$ es positiva para los valores de x en los intervalos

$$\left(0 + 2\pi k \,;\, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \quad , \quad \left(\pi + 2\pi k \,;\, \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

y es negativa para los valores de x en los intervalos

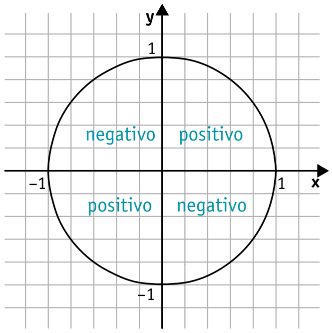
$$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi h \,;\, \pi + 2\pi h\right) \quad , \quad \left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi h \,;\, 2\pi + 2\pi h\right) \text{ con } h \in \mathbb{Z}$$

Con toda la información que se tiene hasta el momento es posible realizar un gráfico de tangente de x.



Como puede verse en el gráfico, la tangente de un ángulo comienza a repetirse cada π, por lo tanto su **período es** π. Además $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$

El signo de la tangente puede determinarse en función de los signos del seno y del coseno. Como en el primer cuadrante el seno y coseno son positivos, la tangente también lo será. En el tercer cuadrante, el seno y el coseno son negativos, luego el cociente será positivo, es decir la tangente será positiva.
En cambio, en el segundo y el cuarto cuadrante, como el seno y el coseno son de signos opuestos, la tangente será negativa.



26. Para valores de x entre 0 y 2π, con $\operatorname{tg} x = 0{,}3$. Calculen $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

27. Encuentren los ángulos donde $\operatorname{tg} x = -1$.

28. Si $\operatorname{sen} x = 0{,}6$, calculen $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$, para x entre 0 y 2π.

29. ¿Qué otro ángulo dentro de la circunferencia trigonométrica, además de $\frac{\pi}{2}$, resulta tener un lado paralelo a la recta tangente? Para ese valor, ¿cuál es su coseno?

30. La tangente de un ángulo es igual a 1,4825, ¿cuánto mide ese ángulo si se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante?

31. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = 0{,}36$ y además $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Sin utilizar calculadora calculen:

a. $\operatorname{tg} x$ **b.** $\cos(2\pi - x)$ **c.** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

32. ¿Entre qué valores se encontrará la tangente de un ángulo?

33. Calculen dominio, ceros, conjunto de positividad y negatividad, período, amplitud y gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $h(x) = -\operatorname{sen}(x - \pi)$ **b.** $t(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

34. Al observar las gráficas del ejercicio anterior, ¿qué conclusiones pueden sacar? ¿por qué?

35. Calculen dominio, ceros, conjunto de positividad y negatividad, período y gráfico aproximado de las siguientes funciones:

a. $m(x) = 2 \operatorname{tg} x$ **b.** $n(x) = \operatorname{tg}(2x)$ **c.** $s(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d. $r(x) = \operatorname{tg} x + 1$ **e.** $t(x) = \operatorname{tg}(2x + \pi)$ **f.** $m(x) = -3 \operatorname{tg} x$

Funciones secante, cosecante y cotangente

Así como la función tangente se puede definir utilizando el seno y el coseno, existen otras funciones que se definen a partir de seno y coseno. Ellas son secante, cosecante y cotangente:

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Problema 24

Determinar el dominio, las asíntotas verticales, los ceros, los intervalos de positividad y de negatividad y el gráfico de $g(x) = \mathit{cosec}\ x$.

Como $\mathit{cosec}\ x = \frac{1}{\mathit{sen}\ x}$, esta función está definida para todos los valores de x salvo aquellos valores donde sen x resulte ser igual a 0 pues no es posible dividir por 0.

Entonces, el dominio de $g(x)$ es:

$$Dom\ (g) = \mathbb{R} - \{\pi k \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$

De hecho, en estos valores, la función tendrá asíntotas verticales.

Para hallar los ceros de $g(x)$

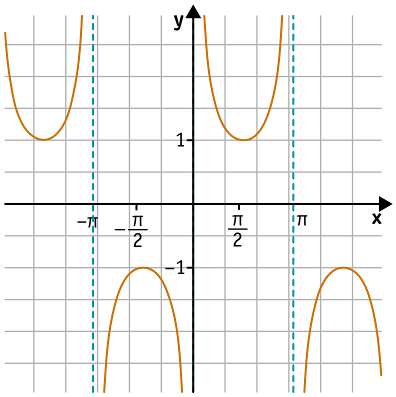
$$\operatorname{cosec} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 0$$

pero este cociente nunca vale 0, ya que para que una fracción sea cero, debe serlo su numerador. Por lo tanto, la función $g(x) = \mathit{cosec}\ x$ no tiene ceros.

$g(x) = \operatorname{cosec} x$ es positiva si $\frac{1}{\mathit{sen}\ x}$ es positivo y esto sucede solamente cuando sen x es positivo. De la misma manera cosec x resulta ser negativa si sen x resulta ser negativo.

Por tal motivo, los intervalos de positividad y de negatividad de cosec x son los mismos intervalos de positividad y de negatividad de la función sen x.

El gráfico de $g(x)$ es entonces:



36. ¿Cuál es el dominio de $h(x) = \sec x$ y de $t(x) = \operatorname{cotg} x$? ¿Tienen ceros? ¿Cuándo son positivas y cuándo negativas?

37. Realicen las graficas de las funciones $h(x) = \sec x$ y $t(x) = \operatorname{cotg} x$.

38. A. Para qué valores de x entre 0 y 2π resulta:

a. $\operatorname{cotg} x = 0$ **b.** $\sec x = 2$ **c.** $\sec x = 0$

d. $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{2}$ **e.** $\operatorname{cotg} x = -1$

B. ¿Cuáles son los valores de x entre -5π y 3π que verifican las ecuaciones anteriores?

Identidades trigonométricas

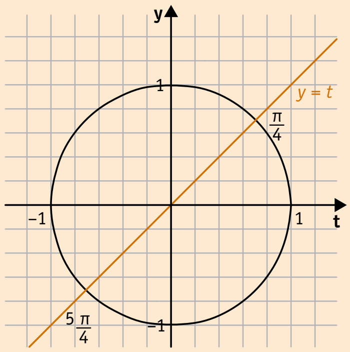
Hay igualdades que resultan ser verdaderas solo para algunos valores de la variable, otras son verdaderas para todos los valores de la variable. En ese caso se dice que las expresiones son equivalentes.

Problema 25

¿Para qué valores de t se cumple $\operatorname{sen} t = \cos t$?

Los ángulos t que verifican que $\operatorname{sen} t = \cos t$, son aquellos que determinan en la circunferencia trigonométrica triángulos rectángulos isósceles.

Los ángulos entre 0 y 2π que verifican esta condición son: $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5}{4}\pi$.



Puede observarse en el gráfico que $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5}{4}\pi$ son los únicos puntos de la circunferencia que están sobre la recta $y = t$. Es decir, todos los valores t de la forma

$t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y

$t = \frac{5}{4}\pi + 2\pi h$ con $h \in \mathbb{Z}$ verifican:

$$\operatorname{sen} t = \cos t$$

La igualdad $\operatorname{sen} t = \cos t$ se verifica solo para algunos valores de t.

Problema 27

¿Para qué valores de x se cumple $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$?

En este caso resulta más difícil hallar los valores de x para los que la igualdad es verdadera.

Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ para todos los valores de x pertenecientes al dominio de la función tangente de x, si se eleva al cuadrado ambos miembros, se obtiene:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Por la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ luego

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$	Se reemplaza $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ en la igualdad anterior.
$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$	Se distribuye.

Por lo tanto esta igualdad se cumple para todos los valores de x pertenecientes al dominio de tangente de x.

Este tipo de igualdades que valen en todo su dominio se llaman identidades trigonométricas.

La identidad pitagórica dice que para todo ángulo t se verifica que:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

39. Encuentren, en cada caso, todos los ángulos que verifican las igualdades:

a. $\operatorname{tg} x = 1$ **b.** $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **c.** $\operatorname{sen} x = 0{,}5$

40. ¿Será cierto que $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

41. Encuentren los ángulos entre -2π y 3π donde

a. $\cos x = -0{,}3$ **b.** $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\operatorname{sen} x = 0{,}65$

d. $\cos x = \frac{3}{2}$ **e.** $\operatorname{tg} x = 5$ **f.** $\operatorname{sen} x - \operatorname{cosec} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

42. Para los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ encuentren, de ser posible, aquellos que cumplan:

a. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **b.** $\operatorname{sen} x = -1$ y $\cos x = 1$

c. $\operatorname{tg} x = 1$ y $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ **d.** $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ y $\cos x = 3$ **f.** $\operatorname{tg} x = -1$ y $\cos x = 0$

43. Sabiendo que x se encuentra entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ y además $\cos x = 0{,}5$ calculen $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$.

44. Encuentren los ceros de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$.

45. Encuentren el período y el gráfico de la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

46. ¿Para qué valores de x la función $g(x) = \cos\left(x + \frac{1}{2}\right) - 1$ alcanza su máximo valor?

47. ¿Para qué valores de la variable la función $h(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$ alcanza su mínimo valor?

48. ¿Existe alguna relación entre $\operatorname{sen} t$ y $\operatorname{sen}(-t)$ para cualquier valor de t? ¿Cuál es esa relación?

49. ¿Será cierto que $\cos(x + y) = \cos x + \cos y$, para cualquier valor de x y de y? Justifiquen su respuesta.

50. Sabiendo que $\operatorname{sen} x = 0{,}857$ y que $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, calculen $\cos x$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Con la calculadora, encuentren el valor de x.

51. ¿Será cierto que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

52. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = 4$ y que $0 \le x \le \pi$, calculen sin utilizar la calculadora.

i. $\operatorname{sen} x$ **ii.** $\cos x$ **iii.** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **iv.** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

53. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π.

a. $3 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{5}x\right) = 3{,}51$ **b.** $\frac{2}{9}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{10}$

c. $\cos x - 5 = -\frac{27}{5}$ **d.** $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -10$

54. Para las mismas ecuaciones que en el problema anterior calculen los valores que cumplen la igualdad para valores de x entre π y 3π.

55. Si el $\cos(3x) = 0{,}068$, utilizando calculadora y sabiendo que $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

a. Calculen los posibles valores de x. **b.** Calculen el $\cos x$.

56. Sabiendo que $-\pi \le x \le \pi$

a. Si $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0{,}78$, calculen el valor de x.

b. Si $\operatorname{sen}\left(-\frac{2}{3}\pi + x\right) = 1$, ¿cuánto vale x? ¿Por qué?

c. Si $\operatorname{sen}\left|-\frac{2}{3}\pi\right| + \operatorname{sen} x = 1$, ¿cuánto vale x?

57. Encuentren los ceros, la amplitud, el período, el dominio, la imagen y grafiquen las siguientes funciones.

a. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$ **b.** $f(x) = -\frac{1}{4}\cos x$

c. $f(x) = 3\operatorname{sen} x$ **d.** $f(x) = \frac{1}{3}\cos(\pi x)$

e. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4} + x\right) - 1$ **f.** $f(x) = 4\cos x$

g. $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **h.** $f(x) = \cos(\pi x) + \frac{2}{3}$

58. a. ¿Será cierto que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ para cualquier valor de x?

b. ¿Será cierto que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ para cualquier valor de x?

59. Calculen los posibles valores de x sabiendo que x está comprendido entre 0 y 2π.

i. $\operatorname{tg} x + 45 = 137$ **ii.** $\frac{\operatorname{sen}(3x)}{4} = 0{,}215$

iii. $3\operatorname{tg} x = 38$ **iv.** $3\operatorname{sen} x = 9$

60. Para las mismas ecuaciones que las del problema anterior calculen los valores de x comprendidos entre -2π y $-\pi$ que cumplen las igualdades.

61. Encuentren gráficamente los valores de x entre $-\pi$ y 2π donde resultan $\cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

62. Verifiquen si las siguientes igualdades son identidades trigonométricas.

a. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ **b.** $1 + \cos^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

c. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \sec^2 x$ **d.** $\frac{1 + \sec^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x}{\sec^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$

e. $\frac{1}{\sec x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$ **f.** $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$

g. $\operatorname{sen} x = \cos(2\pi - x)$ **h.** $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

i. $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = \operatorname{sen}^2 x$

AUTOEVALUACIÓN

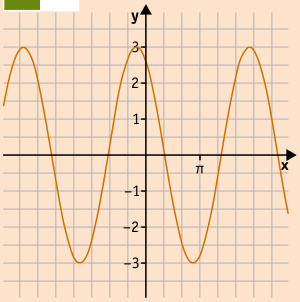
Marquen la o las opciones correctas en cada caso.

1. Los ceros de la función $f(x) = \cos(2x - \pi)$ que se encuentran entre 0 y 2π son

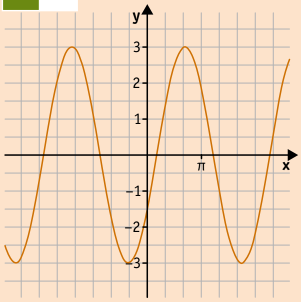
- **a** $\frac{3}{4}\pi$
- **b** $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$
- **c** $\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$
- **d** $\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

2. El gráfico de la función $g(x) = -3 \cdot \operatorname{sen}(x - \frac{2}{3}\pi)$ es

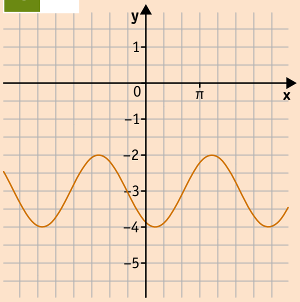
a



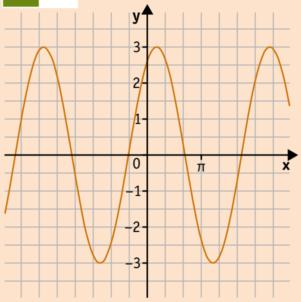
b



c



d



3. La igualdad $\sec x = \operatorname{tg} x$ tiene solución si:

- **a** $x = -\frac{\pi}{2}$
- **b** $x = \frac{\pi}{2}$
- **c** Para ningún valor de x.
- **d** x es de la forma $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

4. Si x está comprendido entre $\frac{3}{2}\pi$ y 2π y:

A. $3 \cdot \operatorname{sen} x = 4{,}5$

- **a** $x \approx 0{,}9974$
- **b** No existe valor de x.
- **c** $x \approx 1{,}5$
- **d** $x \approx -0{,}9974$

B. $\operatorname{tg} x - 3 = -\frac{43}{5}$

- **a** No existe valor de x.
- **b** $x \approx 1{,}745$
- **c** $x \approx -1{,}394$
- **d** $x \approx 4{,}88$

5. El máximo valor de la función $g(x) = 3 - \operatorname{sen} x$ es

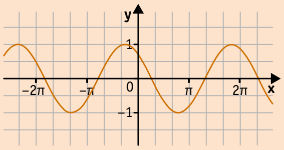
- **a** 1
- **b** 4
- **c** π
- **d** 2

6. La función $g(x) = \operatorname{sen} 3x$ tiene, en el intervalo $[-\pi; \pi]$, exactamente

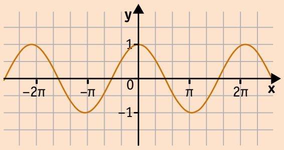
- **a** Ningún cero.
- **b** 3 ceros.
- **c** Infinitos ceros.
- **d** 7 ceros.

7. Observen los siguientes gráficos e indiquen la respuesta correcta.

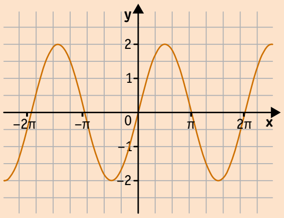
a.



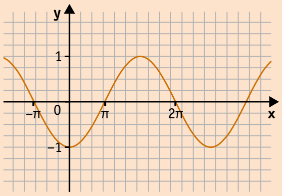
b.



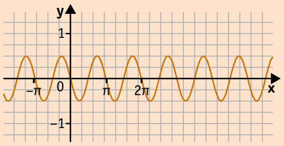
c.



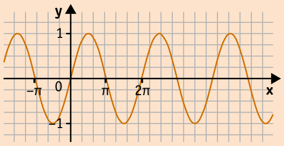
d.



e.



f.



A. El gráfico de $f(x) = \cos x$ es:

- **a**
- **b**
- **c**
- **d**
- **e**
- **f**
- **g** Ninguno de los anteriores

B. El gráfico de $f(x) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ es:

- **a**
- **b**
- **c**
- **d**
- **e**
- **f**
- **g** Ninguno de los anteriores

C. El gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es:

- **a**
- **b**
- **c**
- **d**
- **e**
- **f**
- **g** Ninguno de los anteriores

D. El gráfico de $f(x) = 2\operatorname{sen} x$ es:

- **a**
- **b**
- **c**
- **d**
- **e**
- **f**
- **g** Ninguno de los anteriores

E. El gráfico de $f(x) = -\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ es:

- **a**
- **b**
- **c**
- **d**
- **e**
- **f**
- **g** Ninguno de los anteriores