Provincia de Buenos Aires
Dirección General de Cultura y Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal
Dirección de Educación General Básica
Gabinete Pedagógico Curricular - Matemática

¿ QUÉ ENTENDEMOS POR HACER MATEMÁTICA EN LA ESCUELA?

Año 1997

INTRODUCCIÓN

El propósito de este documento es promover instancias de reflexión entre los docentes del 2º ciclo (con extensión al 1º y al 3º) con relación a nuestra práctica, introduciendo algunos aspectos teóricos elaborados por la didáctica de la matemática, y las posibilidades de su implementación en el aula.

Es por ello que se presenta una primera ***reflexión en cuanto al quehacer matemático*** en la escuela, acompañada de una actividad relacionada a la ***construcción de figuras simétricas***, y otra secuencia relacionada al ***trabajo con fracciones.***

Asimismo, hemos incluido (a continuación de cada una de las actividades) algunas preguntas para los docentes con la finalidad de provocar ciertas reflexiones en cuanto a su puesta en práctica en el aula, como así también profundizar el estudio mediante los anexos respectivos.

A modo de reflexión

Son numerosos los factores que han incidido en la construcción del saber matemático, pero es indudable que uno de los principales ha sido la resolución de problemas de distinta índole: *problemas cotidianos, problemas de otras ciencias y problemas de la matemática.*

Indefectiblemente, los problemas han sido y son el motor del desarrollo de la matemática.

Pero no siempre el saber matemático ha sido elaborado de manera sencilla, hubo errores, dificultades, marchas y contramarchas que exigieron un estilo de trabajo ante cada problema: **investigación, búsqueda, experimentación, respuestas, demostraciones, nuevas preguntas, así hasta formalizar un conocimiento**. Este recorrido entre un problema y su formalización no es en absoluto lineal ni espontáneo, y en algunos casos ha llevado miles de años.

Se plantea entonces que la ***actividad de enseñar matemática*** en el aula esté relacionada, de alguna forma, con el quehacer matemático anteriormente descripto, aunque sea muy difícil precisar los límites entre una y otra actividad. Pero indefectiblemente implica que los alumnos puedan desplegar diferentes estrategias para resolver un problema, poner en juego ideas, buscar diversos caminos de resolución, formular respuestas (aunque sean erróneas), tener la oportunidad de corregirlas, debatir sobre una afirmación, poder probarla o rechazarla, analizar la conveniencia o no de determinados caminos elegidos, analizar la razonabilidad de un resultado, etc. En definitiva, permitir a los alumnos entrar en las características del pensamiento matemático, permitirles vincularse a la forma de producción del conocimiento matemático, asumiendo lo complejo y prolongado de esta tarea.

Esto será posible si se opta por un enfoque que ponga la resolución de problemas en el centro del trabajo.

A su vez, son también los problemas los que permiten que un saber tenga sentido. En cierta forma este es uno de los desafíos para los docentes: ***encontrar situaciones, actividades, juegos, enunciados, cuentas, etc. que permitan a los alumnos construir el significado de un conocimiento matemático, establecer el para qué sirve, como así también los límites de su utilización.***

Ahora bien, no cualquier problema permitirá a los alumnos entrar en el "hacer matemática". Dichos problemas (situaciones, actividades, juegos, enunciados, cuentas, etc.) tendrán que tener ciertas características que permitan a los alumnos desplegar los conocimientos que poseen, pero que a su vez ofrezca cierta resistencia para que la respuesta no sea inmediata. Que involucre una nueva búsqueda y permita desarrollar diferentes estrategias por parte de los alumnos. Pero que asimismo no resulte tan dificultoso de manera que los chicos no puedan siquiera empezar a trabajar.

En tanto un conocimiento aparezca como la solución óptima (no la única) a un problema, es que adquirirá sentido para los alumnos. Pero, a su vez, será necesario ampliar las posibilidades de uso de ese conocimiento. Para ello se deberán presentar una variedad de problemas que permitan poner en funcionamiento dicho conocimiento y realizar un análisis en torno a las características que adquiere en cada uno de ellos; por ejemplo:

1)Se quieren repartir 35 caramelos entre 7 chicos, de manera que a todos les toque la misma cantidad. ¿Cuántos les corresponde a cada uno?

2) Se quieren repartir 35 caramelos, entregando a cada chico 7 caramelos. ¿Para cuántos chicos alcanza?

3)Completar la siguiente tabla de proporcionalidad:

3	. . .	5	6	7
. . .	20	...	...	35

Con estos ejemplos queremos mostrar cómo la división aparece como recurso en el caso de un reparto cuando se busca el valor de cada parte (problema 1); cuando se busca determinar la cantidad de partes (problema 2); o bien en el caso de completar una tabla de proporcionalidad. A pesar de resultar problemas bien diferentes, se los puede vincular a través de la operación que permite resolverlos: la división 35:7. Pero la respuesta de cada uno de los problemas tiene un sentido diferente:

*en el problema 1, serán **5** caramelos para cada chico

*en el problema 2, alcanzan para **5** chicos

*en el problema 3, la constante de proporcionalidad es **5**

Esta clase de problemas es la que permitirá a los alumnos determinar el para qué sirve un conocimiento como así también los límites de su uso.

A su vez será necesario organizar la clase de manera de favorecer la actividad matemática en el aula:

- respetar los tiempos de los alumnos.
- permitir el debate en torno de las ideas que ellos tienen (tanto entre pares como con el maestro).
- otrogar un lugar a los errores (consecuencia de las hipótesis de los alumnos)

En definitiva, **pensar en una organización de la clase que involucre a los chicos en la construcción de los conocimientos, comprometidos con los procedimientos propios y ajenos, abiertos al funcionamiento democrático del aula.**

DESARROLLO DE SECUENCIAS

A continuación presentamos dos actividades como ejemplo de lo antedicho para que puedan ser puestas a prueba en el aula y generar las reflexiones necesarias con la finalidad de ampliarlas, modificarlas, plantear nuevas situaciones para otros contenidos, etc.

A modo de sugerencia: es muy productivo que el docente realice previamente cualquier actividad que quiera implementar en el aula, intentando identificar las posibles dificultades que pueda presentar, o bien anticipar los distintos procedimientos que los alumnos están en condiciones de desplegar.

SIMETRIAS

Uno de los aspectos frecuentemente abandonados en 2º ciclo es la geometría (más allá de las figuras, cálculo de áreas, perímetros, volúmenes). Son variados los motivos del abandono, pero indudablemente uno de ellos es la idea generalizada de "¿para qué sirve"?. Así es como, numerosas veces, quedan fuera del trabajo escolar las construcciones, las reproducciones, las demostraciones.

El dominio de las transformaciones en el plano (por ejemplo la simetría) permite un mayor control, por parte de los alumnos, de las representaciones de movimientos en el plano. No solo de las figuras, sino también de posibles desplazamientos de los chicos que se quieran reproducir en un papel, por ejemplo: si se les pide a alumnos de primero o segundo grado que representen el recorrido desde el aula hasta el baño, esta representación tendrá numerosos aspectos que deben ser analizados y desarrollados dentro del trabajo. Los alumnos descuidan las distancias, los tamaños, pero buscan puntos de referencia sobre los cuales situarse en la representación. Según los puntos de referencia, es posible que (por ejemplo), "el mástil está justo frente al baño", "la puerta de 2º está en diagonal al mástil", etc. Estas relaciones que los alumnos establecen en las construcciones están directamente vinculadas a las posibilidades de dominar su ubicación en el espacio, sus movimientos, entre ellos las simetrías que se pueden determinar

Asimismo, la profundización en la tarea de construcción de figuras, y la determinación de sus propiedades (por ejemplo, la diagonal de un cuadrado es eje de simetría) son aspectos que se verán facilitados en la medida en que se aborden las transformaciones que en un plano puede sufrir una figura. Por ejemplo: la superficie de un triángulo puede ser la mitad de la de un cuadrado, ya que la diagonal de dicho cuadrado es eje de simetría, y quedan definidos dos triángulos de áreas iguales

También resulta una herramienta indispensable a la hora de incorporar procesos de deducción elementales acordes a un 2º o 3º ciclo, vinculados a los ángulos o giros, a las traslaciones de figuras en el plano, como también a la localización de pares ordenados y gráficos con ejes cartesianos . Como muestra se podría pensar en una parábola. Este gráfico es simétrico respecto de un eje en el cual se apoya el foco de la parábola. Esta es una de las razones por las cuales hay antenas "parabólicas". Obviamente estos aspectos no competen a la escuela primaria, pero sí son desarrollados en la escuela media.

Veamos ahora sí una secuencia sobre simetría

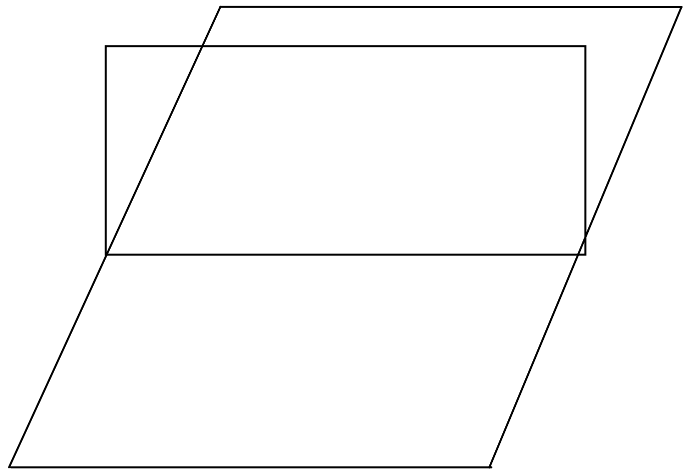
Objetivo para el docente: Introducir la noción de simetría con respecto a una recta

Finalidad para los alumnos: Encontrar una ley general que permita escribir palabras y letras de manera tal que puedan ser leídas a través de un espejo.

Organización de la clase: se trabajará en parejas o tríos, en cada uno de estos grupos deberá haber un espejito, una hoja en blanco y un lápiz o birome.

1º Parte: Se presenta a los alumnos los materiales y se les da la siguiente consigna: "Un integrante de cada grupo deberá escribir la palabra MAMA en letra de imprenta y mayúscula, de manera tal que, cuando él o los otros miembros del equipo coloquen el espejo de manera perpendicular a la hoja, dicha palabra se vea reflejada y se lea correctamente".

Una vez que el alumno elegido escribió la palabra, los otros integrantes del equipo colocan el espejo (ver dibujo 1) y tratan de determinar si es posible leer correctamente la palabra o no.



dibujo 1

Al finalizar la 1º parte se realiza una puesta en común de manera de detallar los errores cometidos que determinaron algún tipo de fracaso en la tarea.

En esta primera etapa se pretende que los alumnos anticipen la posición de las letras y también el orden de escritura (de derecha a izquierda o de izquierda a derecha).

La explicitación de los errores cometidos busca una reflexión por parte de los alumnos en torno a las primera "hipótesis" que puedan desarrollar de cómo deberían ser escritas las letras para que se lean correctamente.

***2º Parte**:* Otro integrante del grupo intenta escribir la palabra MAMA con la misma consigna que en la 1º Parte. Finalizado el intento, los miembros del equipo constatarán si puede ser leída correctamente en el espejo.

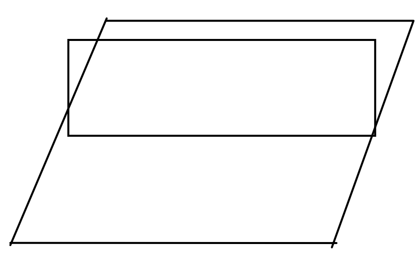
Al finalizar esta etapa, los alumnos expondrán las características que permitan escribir la palabra MAMA de manera tal que pueda ser leída correctamente reflejada en el espejo.

Al docente: -*¿Por qué se dará la misma consigna en la 1º y en la 2º parte?*
-*¿Cuáles prevé que serán las anticipaciones que harán los alumnos en la 1º parte?*

***3º Parte**:* Se le pide a cada grupo que intente escribir los nombres de sus integrantes de manera tal que se lean correctamente al reflejarse en el espejo (primero escriben y luego cotejan con el espejo).

En esta parte, seguramente, aparecerán nuevas complicaciones en la escritura y posición de las letras, en particular con algunas de ellas: P - S - L - R - etc.

Estas letras, a diferencia de las usadas para escribir MAMA, tienen la particularidad de la orientación, o sea, se debe tener en cuenta cómo se verá reflejada en el espejo ya que la simetría determina no solo escribirla "cabeza abajo" sino también hacia la izquierda o la derecha (ver dibujo 2)

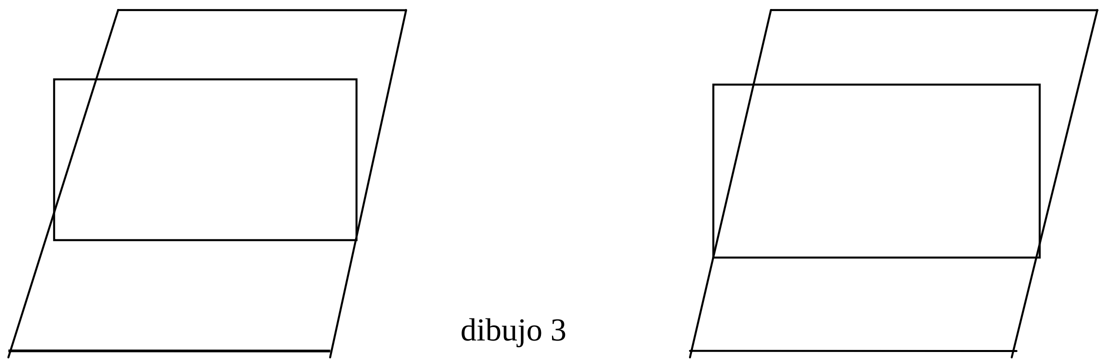


dibujo 2

***4º Parte**:* Al finalizar la escritura de los nombres, cada grupo señalará los errores cometidos (si los hay) en el intento de escribirlos, y las diferencias que aparecieron con respecto a la escritura de la palabra MAMA.

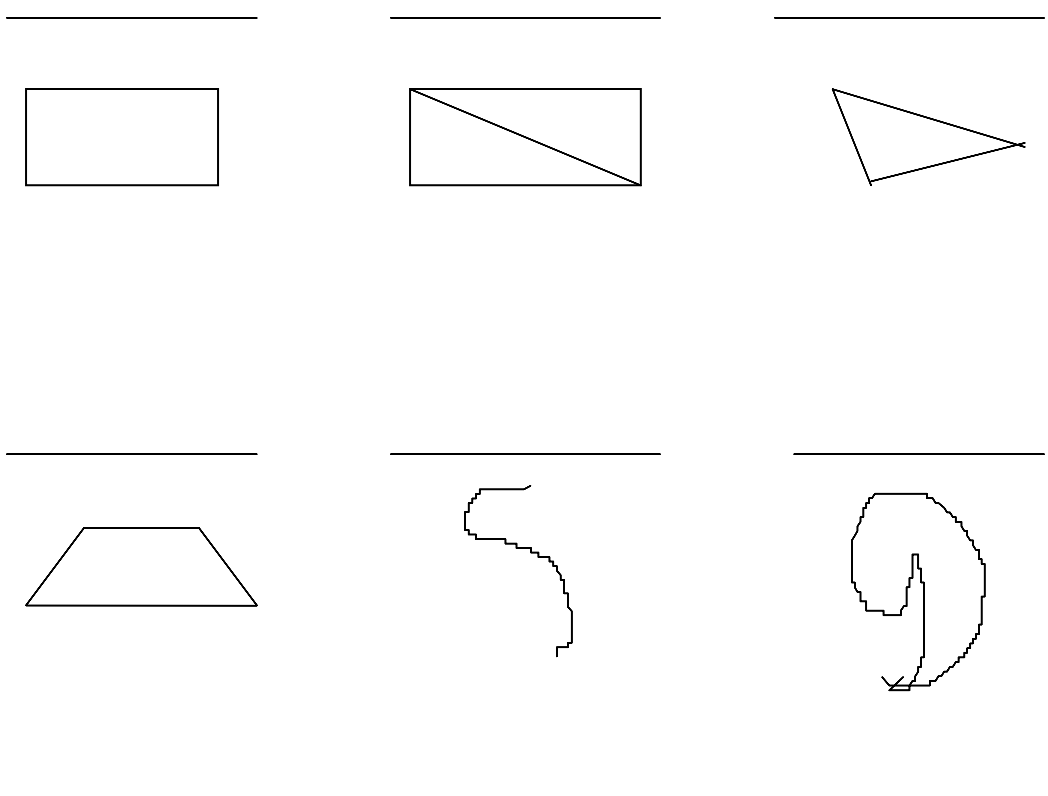
La intención de esta parte es que los alumnos reflexionen en torno a la “hipótesis” elaborada con respecto a la escritura de la palabra MAMA. Fundamentalmente que puedan determinar que no alcanza con decir: “Hay que escribirla cabeza abajo”. ¿Cuáles cree que serán los errores que cometan los alumnos en la 4º parte?

5º Parte*:* Se le pide a cada grupo que redacte una **“ley**” o **“regla”** que permita escribir cualquier palabra o cualquier letra, de manera tal que pueda ser leída correctamente al reflejarla en el espejo colocado en forma perpendicular a la hoja. A su vez se les pide que distingan las letras que no sufren variaciones al ser reflejadas en el espejo (ver dibujo 3). Se puede incorporar una búsqueda de palabras que no sufran modificaciones al ser reflejadas en el espejo.



dibujo 3

6º Parte*:* Se les presenta a los alumnos los siguientes dibujos, indicando que sobre la línea se apoyará el espejo:



Se les pide que dibujen la manera en que se verá reflejada la imagen si se coloca el espejo en la línea. Luego de realizada la tarea se verificará con el espejo si el dibujo realizado es correcto o no.

En esta etapa se intenta que los alumnos anticipen la figura que se verá en el espejo. Para ello deberán imaginar qué ocurrirá con la figura, utilizando lo establecido para las palabras y las letras en las etapas anteriores.

7º Parte*:* Se confronta entre los grupos los errores y aciertos cometidos en los dibujos, especificando las características de aquéllos que han logrado realizarlo correctamente.

En cada una de las partes de confrontación de errores y aciertos, ¿qué supone que sus alumnos expondrán?

8º Parte*:* Se les pide a los alumnos que enuncien una **"regla"** que permita anticipar la manera en que se verá un dibujo o figura cualquiera en un espejo.

¿Cuántas clases cree que le llevará desarrollar todas estas partes? (evidentemente más de una).
En el anexo 1 se hace referencia a:
conocimientos espaciales
conocimientos geométricos
conocimientos espacio - geométrico
¿En cuál de éstos se inserta la secuencia planteada?

FRACCIONES

A lo largo de 3º y 4º grado se presenta a los alumnos variadas situaciones en las cuales las fracciones aparecen como un instrumento útil para medir, para partir, para repartir ,etc. En la mayoría de dichas situaciones, las fracciones adquieren el status de herramienta, esto es, para qué sirven, en qué problemas se pueden usar, en cuáles no, etc.

Ya en el transcurso del 2º ciclo se deberá empezar a trabajar con las fracciones pero no solo como herramienta, sino como objeto de estudio: cómo funcionan, qué propiedades cumplen, qué características las diferencian de otros tipo de números, etc.

Algunos de estos aspectos se despliegan a lo largo del 2º y 3º ciclo de la escuela en torno al concepto de fracción. A pesar de esta insistencia en el trabajo con los números racionales, hay algunas ideas que, igualmente, quedan como puntos oscuros en los alumnos: ***la densidad de los números racionales,*** esto es la posibilidad que brinda este conjunto numérico de poder encontrar ***siempre*** un número racional entre dos racionales dados. Esta propiedad de los números racionales no se verifica en los números naturales: entre 2 y 3 no hay ningún número natural. Esta idea se complejiza aún más cuando se considera el hecho de que no solo hay un número racional - entre dos racionales dados -, sino que hay infinitos.

Esta actividad aborda el encuadramiento de fracciones por intervalos de números naturales como así también por intermedio de otras fracciones.

Esta secuencia fue extraída de: ***Problemas de la enseñanza de los decimales*** de **Guy Brousseau**

Objetivo para el docente: introducir la noción de densidad de los números racionales y también brindar oportunidad de que los alumnos reconozcan las ventajas del trabajo con fracciones decimales (denominador 10, 100 o 1000).

Finalidad para el alumno: Aproximarse a un número fraccionario mediante encuadramientos cada vez más pequeños.

Organización de la clase: Se divide a la clase en grupos de 4 alumnos cada uno. En cada grupo juegan dos contra dos. Los alumnos dispondrán de papel y birome.

1º Parte*:* La consigna es la misma para todos los grupos: Una de las parejas elige un número fraccionario entre 0 y 10. Lo anota en un papel sin que la otra pareja lo vea. La otra pareja deberá adivinar en qué intervalo de números naturales consecutivos se encuentra dicha fracción. Para ello podrá ir arriesgando intervalos que serán respondidos por sí o por no, y luego intentar hacerlos cada vez más pequeños, por ejemplo:

Si la pareja B pensó en la fracción 15/4, la pareja A podrá interrogar:

Pareja A	Pareja B
• ¿Está entre 5 y 10?	Resp: no
• ¿Está entre 1 y 3?	Resp: no
• ¿Está entre 0 y 1?	Resp: no
• ¿Está entre 3 y 5?	Resp: sí

- ¿Está entre 4 y 5? Resp: no
- ¿Está entre 3 y 4? Resp: sí

La pareja A determinó un intervalo de longitud 1 (entre 3 y 4) dentro del cual se halla la fracción que pensó la pareja B. Para ello hizo 6 preguntas.

Esta parte se debe realizar varias veces, alternando la pareja que elige la fracción y la pareja que intenta encuadrarla.

En esta primera parte se busca que los alumnos puedan desplegar diferentes estrategias tendientes a descubrir el intervalo de longitud uno en el cual se encuentra la fracción. A su vez, la pareja que eligió la fracción deberá controlar constantemente la relación entre la fracción y los intervalos por los cuales son interrogados.

Al docente: *-¿Cuáles cree que podrán ser las estrategias que usen sus alumnos para descubrir el intervalo?*
- Una de las utilidades del encuadramiento de fracciones por intervalos de longitud uno es la de permitir comparar fracciones: si 15/4 está entre 3 y 4 y 1370/271 está entre 5 y 6, es claro que 15/4 < 1370/271. ¿Qué otras funciones puede cumplir dicho encuadramiento?

2º Parte*:* Se les plantea a los alumnos la misma consigna (una pareja piensa la fracción y la anota en un papel, la otra intenta descubrir el intervalo) pero agregando la restricción de poder realizar únicamente hasta 4 preguntas.

¿Cuál cree que es la finalidad de limitar la cantidad de preguntas? (Pensarlo a partir de las posibles estrategias para encontrar el intervalo, en particular si se empieza considerando los números del 0 al 10, y se va partiendo siempre por la mitad: ¿está entre 0 y 5?
¿está entre 0 y 3?
¿está entre 2 y 3?)

Al finalizar la 2º parte es posible introducir la notación de intervalo como una convención matemática a ser respetada por todo el curso, por ejemplo:

Si se pregunta ¿está entre 0 y 5?, se puede escribir [0,5] asumiendo que la fracción 15/3 = 5 está en el intervalo.

3 Parte*:* El trabajo en esta parte se realiza por grupos de 4 alumnos. La consigna es: de los intervalos que encontraron durante el juego vamos a elegir uno, por ejemplo el [3,4]. Cada grupo debe encontrar otras fracciones que estén en ese mismo intervalo. Es muy importante en

esta parte preguntar a los alumnos ¿que fracción o fracciones equivalen al número 3? ¿y al número 4?. Se busca que los alumnos reconozcan la posibilidad de pensar al 3 = 15/5 = 12/4 = 21/7 = 30/10 ,etc.

4º Parte: En esta parte la consigna es igual que en la 1º parte, con el siguiente agregado: deberán encuadrar la fracción en un intervalo más chico que el de longitud 1.

Retomemos el ejemplo de la 1º parte: la pareja B pensó en la fracción 15/4. La pareja A pregunta:

pareja A	pareja B
¿en [0,5]?	sí
¿en [0,2]?	no
¿en [3,4]?	sí
¿en [15/5,17/5]?	no

¿en [17/5,19/5]? sí

Evidentemente, no será sencillo para los alumnos reconocer numerosas fracciones en un intervalo de longitud uno. Mucho más complejo aún resultará el hecho de reconocer al número 3 como una fracción: 3 = 15/5, o bien que 4 = 20/5

3 = 12/4, o bien que 4 = 16/4

De ser necesario, el docente retomará la *3º parte*, considerando la posibilidad de encontrar muchas fracciones en un intervalo de números enteros consecutivos.

Una dificultad que también puede presentarse está vinculada a la necesidad que tiene la pareja que eligió la fracción para determinar si el intervalo por el cual se interroga contiene o no a dicha fracción. Esta tarea requerirá en varias ocasiones la intervención del docente.

¿Qué otro tipo de dificultades cree que encontrarán sus alumnos en esta parte?

5º parte*:* Una vez que los alumnos realizaron varias veces la parte anterior, se realizará una puesta en común coordinada por el maestro con la finalidad de que los alumnos expongan las dificultades encontradas y puedan entre ellos establecer algunas convenciones que faciliten la tarea, por ejemplo:

- conviene usar fracciones con el mismo denominador
- es preferible considerar fracciones de denominador 10 o 100
- recordar criterios de comparación de fracciones

- *¿Qué otras convenciones le parece que resultaría interesante establecer?*
- *¿Qué conocimientos deberán tener los alumnos para iniciar estas actividades?*
- *¿Cuántas clases cree que le llevará realizar todas las partes?*

- *En el anexo 2 se desarrolla un análisis en torno a diferentes momentos enmarcados dentro de una secuencia: acción, formulación, validación e institucionalización. ¿Están dichos momentos en la secuencia de fracciones anteriormente descrita?.*
- *Este tipo de diseño ¿podrá ser tenido en cuenta para abordar otros contenidos?*

Mediante este documento hemos querido acercarles algunas ideas provenientes de la didáctica de la matemática. Esperamos que les resulten de utilidad para vuestra práctica cotidiana y abran un espacio de reflexión y debate en torno a la enseñanza de esta área de conocimiento.

Bibliografía:

- Brousseau, G. “Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales” Trabajos de Matemática, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, UniversidadNacional de Córdoba. 1994
- Parra, C.-Saíz, I. “Didáctica de Matemática” Ed. Paidós Educador. Bs. As. 1994.
- Parra, C -Broitman C.-Itzcovich H. Actualización Curricular.Documento de Trabajo Nº 1. Dirección de Currículum.M.C.B.A.